様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 ３０ 日現在

機関番号：１４５０１
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2012～2017
課題番号：２４３４００２９

研究課題名（和文）多成分結合型可積分系に対する双線形化法による統一的研究

研究課題名（英文）Bilinear method for multi-component coupled integrable systems

研究代表者
太田　泰広（Ohta, Yasuhiro）

神戸大学・理学研究科・教授

研究者番号：１０２１３７４５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　6,400,000円

研究成果の概要（和文）：可積分発展方程式系に対しては、様々な結合型方程式系への拡張が可能であり、それらの方程式系には多様な内部自由度をもつ解が存在する。これらの結合型方程式系とその解を体系的に研究することは、理論応用両面において重要である。本研究では、古典可積分系における双線形化法の理論に基づいて、新しい多成分結合型可積分系を構成する方法を与え、それらの方程式系に対する新しい内部自由度の相互作用を記述する解を導出して、その解の具体的な挙動を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：For the integrable evolution equations, there are several methods to generalize them to the coupled systems of equations keeping the integrability, and those integrable coupled equations admit various types of solutions with many internal freedoms. It is important to study the multi-component coupled systems and their solutions systematically both in theoretical study and applications of integrable systems. Based on the theory of bilinear method in the classical integrable systems, the way of constructing new multi-component coupled integrable systems is proposed, and various types of interactions are described by using the internal freedoms of the solutions.

研究分野：応用数学

キーワード：結合型可積分系　双線形化法　ソリトン

1. 研究開始当初の背景

(1) 従来の古典可積分系の理論では、Lax 対、Hamiltonian、自由 fermi 場などの様々な構造に基づいて可積分系階層の構成・分類を行うように理論が定式化されており、これらの構造の間の相互の関係もよく理解されている。しかしながら、与えられた可積分系の階層を拡張して結合型の可積分系を構成しようとすると、どの構造に注目して多成分化を行うかによって、構成される方程式系が異なるということがしばしば起きる。

(2) 多くの結合型可積分系に対しては、ソリトン理論における双線形化法を用いることによって、様々な特解を構成することができる。結合系の場合には、成分同士の相互作用が存在するために、ソリトン解は様々なタイプの内部自由度をもつことになる。さらに成分ごとに色々な境界条件を付加することができるため、それに応じて内部自由度つきの解も多様な構造をもつ。

2. 研究の目的

(1) 結合型の可積分系には様々な内部自由度をもつ解が存在し、それらの解の挙動は、従来の古典可積分系の理論の枠組みでは容易に捉えることができない。一方で様々な物理現象が、このような結合系によって記述されるため、これらの方程式系とその解を体系的に研究することは、理論応用両面において重要である。

(2) 本研究の目的は、古典可積分系における KP 階層の理論を拡張して、結合系に対する新しい代数的分類を与えるとともに、内部自由度をもつ解の相互作用を記述する統一的な理論を構成することである。またその応用として、新しい結合型可積分系や新しい内部自由度の相互作用を記述する解を、系統的に構成することを目標とする。

3. 研究の方法

(1) 双線形化法などを用いて様々な境界条件つき結合型可積分系に対して、具体的な解の構成、Bäcklund 変換や保存量の導出などを行い、系の性質を明らかにしていく。結合型可積分系に関しては未知な部分が多いので、まずは具体的に様々な特解を構成したり、系のもつ性質を丹念に調べていくことから始める。

(2) 従来の KP 階層の理論に現れない双線形形式を制限条件として部分多様体を定義し、その部分多様体を特徴づける対称性を明らかにする。それらの中から、従来の KP 階層の理論の範疇で記述されないものを抽出すれば、その性質によって、結合型可積分系の解空間をパラメトライズするような、普遍 Grassmann 多様体の部分多様体が決定されるはずである。

(3) 部分多様体の対称性によって一般的な結合系の分類を行い、新しい結合型可積分系と境界条件に応じた内部自由度をもつ解を具体的に構成する。その部分多様体の対称性を調べて一般化することによって、目的とする結合型可積分系の分類を完成させる。

4. 研究成果

(1) Davey-Stewartson II 型方程式に対する一般的な rogue wave 解を、双線形化法によって構成し、解の行列式表示を与えた。基本的な rogue wave 解は、定数解から直線状の波面が生成した後、再び定数解に戻るような直線 rogue wave であることが示された。多重 rogue wave 解は、このような基本 rogue wave 解の相互作用を記述する解であり、高次 rogue wave 解は、定数解から始まるが定数解には戻らないような挙動をすることがわかった。これらの rogue wave 解はパラメータの値によっては、空間的に局在した点において有限時間で爆発する場合があることが見出された。ある種の結合型可積分系において、相互作用を記述する際に重要な役割を果たす戸田格子型双線形方程式と同様の構造が、BKP 階層の $(2n,2m)$-簡約から導出される双線形方程式の簡潔な証明においても現れることを見出した。これによって、従来の KP 階層の理論では容易に捉えることができなかった結合型ソリトン方程式系に対して、双線形形式の系統的な構成と分類を与えるための手懸りが得られた。特に BKP 階層の簡約に関する研究から、2-簡約が他の l-簡約 $(l \neq 2)$ とは異なる特殊な構造をもつことが明らかとなった。すなわち、2-簡約は戸田格子の周期 2 の周期条件とはならず、τ

関数の行列式表示において、対角成分の発散から生じる余分な項の存在によって、まったく異なる方程式系を生成することになる。具体例として、2-簡約 BKP 階層から結合型実変形 KdV 方程式などが導出されることがわかった。

(2) 複素変数および実変数の二種類の Dym 方程式に対して、可積分性を保つような差分化を提出した。複素と実のそれぞれの場合について、空間離散時間連続の半離散 Dym 方程式および空間時間ともに離散の全離散 Dym 方程式を構成し、それらの方程式系に対する一般的な N ソリトン解を導出した。ホドグラフ変換に現れる変数を、可積分系の理論において本質的な役割を果たすタウ函数を用いて明示的に表すことによって、可積分系の双線形化法に基づく離散化の方法を、このクラスの発展方程式系に対して直接応用することが可能になった。解は独立変数、従属変数ともに行列式を用いて与えられる。ある種の曲線の運動を記述する可積分系が二成分 KP 階層の簡約から得られることに着目し、曲線の Frenet-Serret 標構を τ 函数を用いて表すと、(1,1) 簡約された二成分 KP 階層の τ 函数に関する有理式が得られる。その高次元の多様体の場合への拡張と、多成分結合型可積分系の τ 函数との関係について考察した。二成分 KP 階層に属する代表的な方程式である非線形 Schrödinger 方程式について、その空間離散類似である Ablowitz-Ladik 方程式系を考え、離散系におけるローグ波について考察した。連続系と離散系において、解の数学的構造には共通性が見られるが、独立変数が離散点上でしか定義されないために、解の挙動には本質的な相違が現れることを明らかにした。

(3) 捩率一定の離散空間曲線の離散時間発展を記述する、離散変形 KdV 方程式および離散 sine-Gordon 方程式について考察を行った。これらの方程式によって記述される離散的な曲線の変形が、isoperimetric 条件を満たす接触平面上の捩率保存等長変形として定式化されることを明らかにした。空間曲線の isoperimetric な等距離変形は、一般には捩率を保存しないが、変形パラメーターを適切にとることによって捩率保存変形を実現することができる。しかも離散時間発展の各時間ステップごとに、離散変形 KdV 方程式に従う変形と離散 sine-Gordon 方程式に従う変形を自由に選ぶことが可能である。空間曲線は Sym-Tafel の公式を用いて変形のデータから再構成される。これらの離散空間曲線の離散的な変形は離散 K 曲面を生成することが示された。ある種の結合型非線形 Schroedinger 型方程式系に対して、集束型非集束型のそれぞれの場合について bright 型、dark 型、それらの混在型のソリトン解のうち、どの組合せの解が存在するかを明らかにした。単独方程式の場合と異なり、結合型方程式系においては解の自由度が高く、様々な境界条件に対応するソリトン解が存在しうる。タウ関数を行列式または Pfaffian によって表現することにより、相互作用を記述するパラメーターが解の中に現れる機構を明らかにした。同様の解析を結合型 Yajima-Oikawa 方程式系に対して行い、非線形 Schroedinger 方程式の場合とは解の構造において顕著な違いがあることがわかった。

(4) 多成分複素変形 KdV 方程式系の階層に対して、ホドグラフ変換を含めた変数変換のもとでの双線形化と、その双線形方程式に対するパフィアン解の代数構造の研究を行った。多成分複素 shortpulse 方程式の多ソリトン解をパフィアンで表現し、ベックランド変換を構成することによって離散ホドグラフ変換を定義した。その離散ホドグラフ変換を用いて空間離散多成分複素 shortpulse 方程式を構成し、そのパフィアン解に対して双線形化法に基づく直接証明を与えた。一般的な多成分複素 shortpulse 方程式には、非線形項における各成分の結合項に任意結合定数が含まれるが、それらは多成分パフィアンの成分の中の位相パラメータとして現れる。双線形方程式の一部はパフィアン版のプリュッカー関係式には帰着されず、パフィアンに対するラプラス展開を用いて直接的に証明される。系の時間発展は、元の複素場の時間発展方程式と差分間隔に対する時間発展方程式の結合系によって支配される。カスポンやループソリトンを含む具体的な解の挙動についても明らかにした。これらの結合型可積分系は、相似性を要請する次元簡約を行うのではなく、結合条件を要請することが簡約条件となって導出される。変形 BKP 方程式階層に対して結合条件による次元簡約を適用することにより、結合型変形 KdV 方程式階層、結合型 Sawada-Kotera 方程式階層などの

ソリトン方程式の階層の階層が構成できることが明らかになった。結合条件を与える双線形方程式は、パフィアンに対する新しい代数関係式に帰着されることが示された。

(5) 無分散波動方程式の多成分化によってえられる実および複素変数型結合系が、空間曲線の時間的変形を記述することを幾何学的に明らかにし、ホドグラフ変換を介して実および複素変数型短波方程式に帰着されることを示した。幾何学的に Lax 対を構成することによって、これらの結合系の可積分性を示し、解空間の構造を代数的に研究することによって、拡張された二成分 KP 系列からこの多成分無分散波動方程式系を導出することができることを見いだした。行列式によるタウ関数の表示を用いて、ソリトン解などの具体的な解の構成を行った。退化 Ostrovsky 方程式に対する二成分拡張を提出し、その方程式系が二成分 Degasperis-Procesi 方程式の短波極限として現れることを示した。Lax 対を構成してこの方程式系の可積分性を明らかにし、BKP 系列の擬 3 簡約にホドグラフ変換を施すことによって具体的な解の構成を行った。離散ホドグラフ変換を行うことにより、空間離散二成分退化 Ostrovsky 方程式を提出した。これらの結合系においては、非線形方程式の多成分化によって解の代数構造が本質的に変化し、タウ関数の表示が行列式からパフィアンに移行する場合があるが、いくつかの方程式系においては多成分化を行わなくても離散化するだけでパフィアンによって解が与えられることが示された。また、通常では解空間が自明に縮退するような 1 型簡約が、多成分パフィアンにおいては非自明な構造をもちうることを見いだし、このような簡約によって導出される方程式の階層を構成した。

(6) Degasperis-Procesi 方程式およびその短波モデルである退化 Ostrovsky 方程式または Vakhnenko 方程式が C_∞ 型の 2 次元戸田格子方程式に帰着されることを明らかにした。これらの方程式系に対してホドグラフ変換によって双線形形式を構成し、パフィアンによるソリトン解の表示式を与えるとともに、ソリトンの相互作用時における具体的な解の挙動を詳細に研究した。非線形可積分系である Degasperis-Procesi 方程式に対して、広田の双線形化法に基づいて可積分性を保存する空間差分化を行った。さらにこの半離散 Degasperis-Procesi 方程式に対する一般的な N ソリトン解のパフィアン表示を構成し、連続極限において元の Degasperis-Procesi 方程式の N ソリトン解に収束することを確かめた。非線形方程式の双線形化において、離散ホドグラフ変換が重要な役割を果たし、ラグランジュ座標に相当する変数をソリトン理論におけるタウ関数を用いて明示的に与えることに成功した。通常の KP 階層におけるタウ関数に対しては 1 型簡約は意味をなさず、簡約条件を課すことによって自明解しか許容されなくなり、方程式系も退化してしまうが、多成分化された結合型の非線形可積分系においては、パフィアン解が 1 型簡約条件のもとでも非自明な自由度をもち、任意個の径数を含む多成分パフィアンを解とするような新しいソリトン方程式系が導出されることを明らかにした。このような 1 型簡約された方程式系の解空間の代数的構造を、ソリトン理論における双線形化法を用いて研究した。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 9 件)

(1) B.-F. Feng and Y. Ohta, N-bright-dark soliton solution to a semi-discrete vector nonlinear Schrödinger equation, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 査読有 **13** (2017) 071. DOI: 10.3842/SIGMA.2017.071

(2) B.-F. Feng, K. Maruno and Y. Ohta, The Degasperis-Procesi equation, its short wave model and the CKP hierarchy, Annal. Math. Sci. Appl. 査読有 **2** (2017) 285–316. DOI: 10.4310/AMSA.2017.v2.n2.a4

(3) B.-F. Feng, K. Maruno and Y. Ohta, An integrable semi-discrete Degasperis-Procesi equation, Nonlinearity 査読有 **30** (2017) 2246–2267. DOI: 10.1088/1361-6544/aa67fc

(4) B.-F. Feng, K. Maruno and Y. Ohta, Geometric formulation and multi-dark soliton solution to the defocusing complex short pulse equation, Stud. Appl.

Math. 査読有 **138** (2017) 343–367. DOI: 10.1111/sapm.12159

(5) B.-F. Feng, K. Maruno and Y. Ohta, A two-component generalization of the reduced Ostrovsky equation and its integrable semi-discrete analogue, J. Phys. A: Math. Theor. 査読有 **50** (2017) 055201.

(6) S. Shen, B.-F. Feng and Y. Ohta, From the real and complex coupled dispersionless equations to the real and complex short pulse equations, Stud. Appl. Math. 査読有 **136** (2016) 64–88.

(7) B.-F. Feng, K. Maruno and Y. Ohta, Integrable semi-discretization of a multi-component short pulse equation, J. Math. Phys. 査読有 **56** (2015) 043502.

(8) J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura and Y. Ohta, Discrete mKdV and discrete sine-Gordon flows on discrete space curves, J. Phys. A: Math. Theor. 査読有 **47** (2014) 235202.

(9) B.-F. Feng, J. Inoguchi, K. Kajiwara, K. Maruno and Y. Ohta, Integrable Discretizations of the Dym Equation, Front. Math. China 査読有 **8** (2013) 1017–1029.

[学会発表] (計 6 件)

(1) B.-F. Feng and Y. Ohta, Semi-discrete analogues of the complex short pulse and coupled complex short pulse equations based on the KP hierarchy reduction, AMS Sectional Meeting (Fall Central Sectional Meeting), 10 Sep 2017, Denton (USA).

(2) Y. Ohta, Coupled soliton equations derived from BKP hierarchy by reduction, International Workshop on Integrable Systems – Mathematical Analysis and Scientific Computing, 19 Oct 2015, Taipei (Taiwan).

(3) 丸野 健一, 梶原 健司, 井ノ口 順一, 太田 泰広, Feng Baofeng, 自己適合移動格子スキームとミンコフスキー平面上の離散曲線の運動について, 日本応用数理学会 2014 年度年会, 2014 年 9 月 4 日, 政策研究大学院大学 (東京).

(4) 井ノ口 順一, 梶原 健司, 松浦 望, 太田 泰広, 離散 mKdV 方程式と離散 sine-Gordon 方程式による空間離散曲線の変形, 日本数学会 2014 年度年会, 2014 年 3 月 16 日, 学習院大学 (東京).

(5) 井ノ口 順一, 梶原 健司, 松浦 望, 太田 泰広, 空間離散曲線の等周変形と離散 K 曲面, 平成 25 年度九州大学応用力学研究所共同利用研究集会「非線形波動研究の拡がり」, 2013 年 10 月 31 日, 九州大学 (福岡).

(6) 井ノ口 順一, 梶原 健司, 松浦 望, 太田 泰広, Discrete mKdV flow on discrete space curves, 日本応用数理学会 2013 年度年会, 2013 年 9 月 9 日, アクロス福岡 (福岡).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

太田 泰広 (OHTA Yasuhiro)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 10213745

(2) 連携研究者

山田 泰彦 (YAMADA Yasuhiko)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 00202383

野海 正俊 (NOUMI Masatoshi)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 80164672