

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 4 月 30 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24500001

研究課題名(和文)再生核ヒルベルト空間における標本化定理の数理

研究課題名(英文)Mathematical Analyses on Sampling Theorems in Reproducing Kernel Hilbert Spaces

研究代表者

田中 章(Tanaka, Akira)

北海道大学・情報科学研究科・准教授

研究者番号：20332471

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,100,000円

研究成果の概要(和文)：標本化定理は、今日のデジタル信号処理の礎であることは論を俟たない。本研究では、再生核ヒルベルト空間に係る標本化定理について理論的に解析を行った。標本化定理とは、離散点の情報のみから未知関数を再構成する問題であり、すなわち関数空間の可分性と表裏一体の問題である。本研究では、所与の再生核ヒルベルト空間に一意に対応する再生核のある種の連続性が当該再生核ヒルベルト空間の可分性を担保することを理論的に解明した。また、今日注目を集めている、複数の再生核による関数再構成問題についても理論的に解析し、個々の再生核による最適推定結果の結合として得られるアンサンブルカーネル回帰の有効性を理論的に明らかにした。

研究成果の概要(英文)：It is well known that the sampling theorem plays a crucial role in the field of digital signal processing. In this work, we theoretically analyzed the sampling theory for the reproducing kernel Hilbert spaces. The sampling theorem and the separability of a target function space are two sides of the same coin. We proved that a certain continuity of a reproducing kernel corresponding to the target reproducing kernel Hilbert space guarantees the separability of the reproducing kernel Hilbert space. Recently, function estimation by multiple reproducing kernels attracts much attention in this field. We also analyzed the theoretical properties of such problems and revealed the advantages of the so-called ensemble kernel regression scheme which is a combination of the estimated functions by each reproducing kernel.

研究分野：標本化定理

キーワード：標本化定理 再生核 再生核ヒルベルト空間 汎化誤差 アンサンブルカーネル回帰 マルチカーネル回帰

## 1. 研究開始当初の背景

標本化定理が、現代社会で利用される様々なデジタル機器の理論的な礎であることは今や周知の事実である。1920年に小倉金之助が、また、1928年にナイキストが予想したこの標本化定理は、その20数年後の1949年に染谷とシャノンが与えた証明により、広く世の中に知られるようになり、それ以降も様々な拡張や一般化の議論がなされてきた。中でも特筆すべきは、1988年に東京工業大学の小川により発表された「一般標本化定理」の理論である。この理論の核心は、関数の標本化という操作を数学的に厳密に定式化することができる再生核、及び、それに対応する再生核ヒルベルト空間の枠組を導入したことにある。この枠組の導入により、所与の標本点集合から被標本化関数を再構成する問題を、線形作用素として表現可能な標本化過程の逆問題という数学的に非常に見通しのよい形式に帰着させることができるようになった。この成果により、旧来の標本化定理は、一般標本化定理の主張のごく特殊な一例として解釈することができることが明らかになった。ところで、パターン認識や回帰推定、密度推定等に代表される、いわゆる機械学習の分野において、再生核を用いたカーネルトリックと呼ばれる技術がここ15年ほどの間に広く認知されるようになり、とりわけ応用面に関する研究が爆発的に発展したことは記憶に新しい。しかしながら、機械学習のコミュニティーにおいては、カーネル関数は、システムの入力を(無限次元を含む)高次元の特徴空間へ写像するとともに、当該特徴空間における内積を規定し算出する道具立てとして認知されており、故に、機械学習問題の定式化に内包されない恣意的な道具立てである、と解釈する立場が支配的であった。それ故、応用面での発展とは裏腹に、その最適性や理論的妥当性は置き去りにされている感が拭えなかった。それに対し、小川らの研究グループは、機械学習の問題が、前述の一般標本化定理の理論が扱う問題と本質的に同一であることを指摘し、この枠組による射影学習という概念を提唱した。この概念に基づく解釈により、カーネル関数が、未知の推定対象が属する空間を規定し、かつ、解空間上の最適解、すなわち解空間への直交射影を与える際の計量をも規定するものとして、機械学習問題の定式化に内包されるのみならず、解の最適性に大きく影響を与えるものであることを理論的に明らかにした。この他にも、小川らは、いわゆる劣化信号の復元問題や、CT/MRIといった医療診断装置における像再構成問題等も全く同じ枠組で議論できることを示している。以上のように、一般標本化定理の理論は、標本化という一領域を俯瞰するのみならず、情報科学における広範な領域に対する大きなマイルストーンであると言える。

## 2. 研究の目的

上で述べたように、一般標本化定理の理論により、標本化や機械学習、信号復元再構成等の様々な分野の問題が統一的に解釈できるようになり、かつ、その中で、再生核が規定する解の最適性の機序が明らかになった。このような背景の下、申請者を含む北海道大学の研究グループは、上で述べた標本化定理と再生核ヒルベルト空間の関係に着目し、主に以下のような理論的成果を挙げている。

1. 所与の再生核ヒルベルト空間の任意の関数が、所与の標本点集合によって完全再構成できるための必要十分条件を解明した。
2. 所与の標本点集合では関数を完全再構成できない場合、その誤差について数理的に解析した。

結論から言えば、本研究の目的は、これらの理論的成果の実用への展開を図ることにある。ところが、前者については、この成果の実用への展開を見据えた場合、そもそも、所与の再生核ヒルベルト空間が、標本化定理が成立するような標本点集合を持ち得るのか否かすら解明されていないという大きな問題が残されている。この問題の解決なくして、

1. の成果の机上の空論からの脱却はあり得ない。しかるに、前者の成果の実用への展開に向けて、
  - A. 再生核ヒルベルト空間が標本化定理を満たす標本点集合を持つための条件の解明。
  - B. A. の成果をもとに、標本化定理を有する再生核ヒルベルト空間を網羅的に調査。
  - C. 様々な実問題で扱う信号に適した再生核ヒルベルト空間を調査し、実際に標本化定理を構築。
- の三点が、本研究の主要な目的となる。

## 3. 研究の方法

本研究の目標を完遂することとは、すなわち「研究目的」の項で述べた課題を、数学的な定理を証明するという形で決着させることである。これを実現するために実行可能なことは、効果的に情報を収集すること以外にない。研究期間中は、学術的な会議における情報収集や他機関の研究者との研究討論を通じて効果的に情報を収集し、目標の完遂を目指す。

## 4. 研究成果

上記研究目的に対し、本研究期間において以下のような成果を得た。

### 研究目的 A) に関する成果

所与の関数空間が標本化定理を有するためには、当該関数空間の可分性が必要となる。しかるに、応用を想定した場合、所与の再生核ヒルベルト空間が可分となるために、対応

する再生核が満たすべき条件が重要となる。これに対し、本研究で再生核に関する種の連続性が当該可分性を担保することを解明した。

## 研究目的 B) 及び C) に関する成果

実用上有用な関数空間の一つとして、帯域通過型の信号からなる関数空間がある。これについて過去様々な研究がなされているものの、間違いを含む結果や解釈が困難な結果などが散見されていた。これに対し、当該関数空間が再生核ヒルベルト空間をなすことを証明するとともに、当該空間に対し、非常に見通しのよい標本化定理を構築することに成功した。

## 研究目的の更なる発展に関する成果

近年では、複数の再生核を用いた関数推定法も注目を集めている。これに対し、複数の再生核による最適推定結果を結合するアンサンブルカーネル回帰が、個々の再生核による推定結果より、平均的な意味で良い推定結果を与えることを示すとともに、当該アンサンブルカーネル回帰が、事前に結合した再生核により推定を行う、マルチカーネル回帰よりも良好な推定結果を与えるための十分条件を明らかにした。

## その他の成果

本研究課題における理論整備の一環として、当該研究課題と密接な関係を有する線形系逆問題や線形システムに関して、以下のよう成果を得た。

(1) 欠損値を有する所与の信号から、当該欠損値を推定する手法として、線形回帰と最適なブロック選択に基づく手法、並びに、最小分散凸結合を利用する効果的な手法を開発した。また、その応用例として、デジタル画像のデモザイクング問題への適用を行った。

(2) 結晶構造を有するセンサーアレイを用いて、拡散性雑音を効果的に抑制する手法を開発した。

(3) 厳密には同時対角化できない複数の非負定値エルミート行列の同時対角化問題に対し、解析解を用いて高速に解を得る手法を開発した。

(4) 線形系逆問題に対して、未知信号に対する線形拘束条件と確率的な構造の両方を利用可能な解法を開発した。

(5) センサーアレイによる信号到来方向推定問題に対し、斜射影を用いることにより、高精度に方向推定可能な手法を開発した。

(6) 混合信号から、混合される前の未知原信号を推定するブラインド信号源分離問題に対して、一般に興味の対象となることが多い非定常信号を優先的に抽出することで計算量を削減する手法を開発した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

A. Tanaka, I. Takigawa, H. Imai, M. Kudo, "Extended Analyses for an Optimal Kernel in a Class of Kernels with an Invariant Metric", Lecture Notes in Computer Science, Structural, Syntactical and Statistical Pattern Recognition, Vol. LNCS7626, 2012, pp.345-353, 査読有

A. Tanaka, K. Kohno, "Multi-frame Image Denoising Based on Minimum Noise Variance Convex Combination with Difference-Based Noise Variance Estimation", IEICE Transactions on Fundamentals, Vol. E96-A, No.10, pp.2066-2070, 2013, 査読有

A. Tanaka, H. Imai, "Parametric Wiener Filter with Linear Constraints for Unknown Target Signals", IEICE Transactions on Fundamentals, Vol. E97-A, No.1, pp.322-330, 2014, 査読有

A. Tanaka, I. Takigawa, H. Imai, M. Kudo, "Analyses on Generalization Error of Ensemble Kernel Regressors", Lecture Notes in Computer Science, Structural, Syntactical and Statistical Pattern Recognition, Vol. LNCS 8621, pp.273-281, 2014, 査読有

[学会発表](計20件)

A. Tanaka, T. Ogawa, M. Haseyama, "Image Inpainting by Block-Based Linear Regression with Optimal Block Selection", APSIPA Annual Summit & Conference (APSIPA2012), 2012年12月03日, Loews Hollywood Hotel (米国), 査読有

A. Tanaka, R. Takahashi, "Diffusion Noise Suppression by Crystal-Shape Subtraction Array", APSIPA Annual Summit & Conference (APSIPA2012), 2012年12月03日, Loews Hollywood Hotel (米国), 査読有

A. Tanaka, M. Murota, "Performance Improvement of Closed-Form Joint Diagonalizer of Non-Negative Hermitian Matrices", 2012年12月03日, Loews Hollywood Hotel (米国), 査読有

K. Kohno, A. Tanaka, H. Imai, "A Novel Criterion for Quality Improvement of JPEG Images Based on Image Database and Reapplication of JPEG", APSIPA Annual Summit & Conference (APSIPA2012), 2012年12月03日, Loews Hollywood Hotel (米国), 査読有

A. Tanaka, "KERNEL-INDUCED SAMPLING

THEOREM FOR BANDPASS SIGNALS WITH UNIFORM SAMPLING”, 2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP2013), 2013年05月30日, Vancouver Convention & Exhibition Centre (カナダ), 査読有

M. Murota, A. Tanaka, “Performance Improvement of The FFdiag Algorithm Based on Pre-diagonalization by Closed-form Joint Diagonalizers”, The 15th IASTED International Conference on Signal and Image Processing (SIP 2013), 2013年7月17日~2013年7月19日, Banff Park Lodge (カナダ), 査読有

K. Kohno, A. Tanaka, “Image Inpainting Based on Block-Based Linear Regression and Minimum Variance Convex Combinations”, The 15th IASTED International Conference on Signal and Image Processing (SIP 2013), 2013年7月17日~2013年7月19日, Banff Park Lodge (カナダ), 査読有

田中章, 今井英幸, 工藤峰一, “A Sufficient Condition For Reproducing Kernel Hilbert Spaces Being Separable”, 2013年11月22日, 第28回信号処理シンポジウム, 海峡メッセ下関(下関市), 査読無

河野克也, 田中章, 「カーネル回帰を用いたJPEG再適用法によるJPEG画像の画質改善」, 第28回信号処理シンポジウム, 2013年11月21日, 海峡メッセ下関(下関市), 査読無

室田美帆, 田中章, 「同時対角化解析解を用いたCVFFDIAGの収束性能改善」, 第28回信号処理シンポジウム, 2013年11月20日, 海峡メッセ下関(下関市), 査読無

田中章, 今井英幸, 「斜射影を用いたMUSIC法によるDOA推定」, 日本音響学会2014年春季研究発表会, 2014年3月12日, 日本大学駿河台キャンパス(東京), 査読無

A. Tanaka, I. Takigawa, H. Imai, M. Kudo, “Theoretical Analyses on Ensemble and Multiple Kernel Regressors”, The 6th Asian Conference on Machine Learning (ACML2014), 2014年11月26日~2014年11月28日, Sunrise Hotel (ベトナム), 査読有

A. Tanaka, H. Imai, “MUSIC-based DOA Estimation by Oblique Projection Along The Signal Subspace”, 2014 IEEE Workshop on Statistical Signal Processing (SSP2014), 2014年6月29日~2014年7月2日, Jupiter Hotel (オーストラリア), 査読有

A. Tanaka, “Analyses on Empirical Error Minimization in Multiple Kernel Regressors”, 2015 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP2015), 2015年4月22日, Brisbane Convention & Exhibition Center (オーストラリア), 査読有

田中章, 瀧川一学, 今井英幸, 工藤峰一, 「マルチカーネル回帰とアンサンブルカーネル回帰の汎化誤差解析」, 第29回信号処理シンポジウム, 2014年11月14日, 立命館大学朱雀キャンパス

(京都市), 査読無

河野克也, 田中章, 「ブロックベース線形回帰と非局所的冗長性を利用したデモザイキング」, 第29回信号処理シンポジウム, 2014年11月14日, 立命館大学朱雀キャンパス(京都市), 査読無

竹林裕史, 田中章, 「アンサンブルカーネル回帰とマルチカーネル回帰の汎化性能に関する一考察」, 第29回信号処理シンポジウム, 2014年11月13日, 立命館大学朱雀キャンパス(京都市), 査読無

張ケン, 田中章, 「非正常信号選択型独立成分分析によるブラインド信号源分離」, 第29回信号処理シンポジウム, 2014年11月12日, 立命館大学朱雀キャンパス(京都市), 査読無

尾崎大顕, 田中章, 「KLダイバージェンスを用いたNMFアルゴリズムの変数選択に基づく高速化」, 第29回信号処理シンポジウム, 2014年11月13日, 立命館大学朱雀キャンパス(京都市), 査読無

安間悠貴, 田中章, 「一般化固有値展開に基づく信号部分空間推定と斜射影を用いたDOA推定」, 第29回信号処理シンポジウム, 2014年11月14日, 立命館大学朱雀キャンパス(京都市), 査読無

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ等

なし.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

田中章 (TANAKA AKIRA)

北海道大学・大学院情報科学研究科・准教授  
研究者番号: 20332471