様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ５ 月 ２０ 日現在

機関番号：１２６０８
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2015
課題番号：２４５０００２

研究課題名（和文）非線形制約をもつ整数計画問題に対する理論保証付き近似解法の開発

研究課題名（英文）Development of Approximation Algorithms with Theoretical Guarantee for Integer Programming Problem with Nonlinear Constraint

研究代表者
塩浦　昭義（Shioura, Akiyoshi）

東京工業大学・社会理工学研究科・准教授

研究者番号：１０２９６８８２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　4,100,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，非線形な不等式制約の下で非線形関数を最大化するという整数計画問題に対し，解の精度および計算時間に関する理論的な保証を与える近似解法を開発することを目指した．本研究の主結果として，ナップサック制約の下で１つのM凹関数を最大化するという問題に対し，制約が複数個の場合でも，連続緩和アプローチを用いて任意の精度の近似解を多項式時間で求められることを示した．また，目的関数が２つのM凹関数の和の場合には，ラグランジュ緩和アプローチを用いて任意の精度の近似解が得られることを示した．

研究成果の概要（英文）：In this research, we consider integer programming problems with nonlinear objective functions and nonlinear inequality constraints, and aimed at developing approximation algorithms with theoretical guarantee for quality of solutions and running times. As the main results of this research, we proposed an approximation algorithm for the maximization of M-concave function with multiple knapsack constraints, and showed that the proposed algorithm finds an approximate solution that is arbitrarily close to an optimal solution in polynomial time. The proposed algorithm is developed based on a continuous relaxation approach. We also consider the maximization of the sum of two M-concave functions, and showed that an approximate solution that is arbitrarily close to an optimal solution can be obtained in polynomial time by using a Lagrangian relaxation approach.

研究分野：離散最適化

キーワード：整数計画問題　非線形関数　アルゴリズム　離散最適化　離散凸解析

１．研究開始当初の背景

本研究では，非線形な不等式制約の下で，非線形な関数を最大化する整数ベクトルを求める，という形の非線形整数計画問題を扱う．この問題は，数学的には次のように定式化される．

(NLIP) 最大化　$f(x)$

条件：$g_i(x) \geqq b_i$　($i=1,2,\cdots,m$),

x は整数ベクトル

ここで, f および各 g_i は整数格子点上で定義される非線形関数である．

問題(NLIP)の応用例は，ロジスティクス，生産計画，ファイナンスなど，多種多様である．関数 f および g_i が線形の場合である，古典的な線形整数計画問題に比べ，問題(NLIP)は現実問題をより正確にモデル化する能力が高く，適用範囲が広い．また，アルゴリズム技術の発展及びコンピュータの性能向上により, (NLIP)が以前に比べて高速に解けるようになり，利用頻度が高まっている．これらの理由により, 問題(NLIP)は現在大きな注目を浴びている．

問題(NLIP)を解く上での一つの目標は, 最適解を厳密に求める効率的な解法 (厳密解法)の構築であり，これまで数多くの厳密解法が提案されている．しかし，問題(NLIP)はＮＰ困難，すなわち解を計算することが非常に困難な問題である．従って，(NLIP)は極めて計算困難な問題であり，それゆえに厳密解法は解を求めるまでに長時間を必要とする，という欠点がある．

問題(NLIP)を解く上でのもう一つの大きな目標は，高精度の近似解を短時間で求める解法 (近似解法)の構築である．近似解法は良質な近似解を，厳密解法に比べて非常に短い時間で見つける．さらに，近似解法は，厳密解法に組み込まれることにより，厳密解法の計算時間を大幅に削減する．そのような近似解法の代表例が RINS, diving heuristics, feasibility pump などである．しかし，これらの近似解法には，解の品質及び計算時間に関して理論的な保証は何もない．実験的にはおおむね良い結果を示しているが，最悪の場合，長時間の計算の後，低品質な解を出力する可能性がある．

２．研究の目的

本研究では, 目的関数 f と制約を定める関数 g_i が共にM凹関数で与えられた非線形整数計画問題(NLIP)(以下，(NLIP-MC))に対し，解の品質及び計算時間に関する理論保証をもつ近似解法の開発を行う．問題(NLIP-MC)は(NLIP)の特殊ケースではあるが, 十分に一般的な問題である．

問題(NLIP-MC)においては，f と g_i がともにM凹関数という良い性質を有しているものの，問題全体としては，(i) 関数の非線形性, および(ii) 変数に関する分離不可能性，という２つの理由により，近似精度を保証する多項式時間アルゴリズムの構築は容易ではない．とくに理由(ii)のために, 既存のアルゴリズムで使われた技法をそのまま(NLIP-MC)に適用することは不可能である．この困難を克服すべく，本研究では(NLIP-MC)の構造を数学的に明らかにすると共に，問題を解くための新たなアルゴリズム技法を提案する．

本研究で提案する近似解法では，解の品質および計算時間に関して理論的な保証を与える．このような理論保証は，既存研究では殆どの場合において考慮されていない．数学的に理論保証を与えることは，理論的な興味に留まらず，アルゴリズムの利用者に安心を与えるという意味で，実用的にも重要である．

本研究で扱うM凹関数は「各変数ごとに分離不可能」という特徴をもつ．これは，既存研究で扱われてきた線形関数や分離可能凹関数に比べて非常に複雑な構造であるため，既存のアルゴリズム技法をそのまま利用することは不可能である．本研究では，「離散凸解析」の研究で得られた数学的成果を利用することにより，M凹関数のように複雑な構造をもつ関数でも適用可能な新たなアルゴリズム技法を開発する．

問題(NLIP-MC)は数理経済学や組合せオークションなどの様々な応用をもつことが知られているが，とくに数理経済学における「財の最適配分」という重要な応用例をもつ．(NLIP-MC)に対する近似アルゴリズムを開発することにより，組合せ最適化分野のみならず，数理経済学の分野への貢献も期待される．

３．研究の方法

本研究課題の目的は，非線形整数計画問題(NLIP-MC)に対して, 解の品質及び計算時間の両面で理論的な保証をもつ近似解法の開発である．これには，組合せ論，整数計画，連続最適化などの分野で培われた技術の利用に加え，新たなアイディアが必要とされる．本研究課題を成功に導くために，「連続緩和に基づくアプローチ」，「ラグランジュ緩和を用いたアプローチ」，の２つにより，アルゴリズムの開発を行う．

平成 24，25 年度は「連続緩和アプローチ」に基づくアルゴリズムの開発を進める．このアプローチでは，①元の問題を解きやすい連続最適化問題に緩和し，②緩和した問題の最適解（実数ベクトル）を求め，③得られた実数ベクトルを整数ベクトルに変換する，という手順により近似解を求める．このアプローチの成功に向けての課題と解決方法は以下

の通りである．

・ステップ①において，緩和問題として適切な連続最適化問題を選ぶ必要がある．この選択によって，最終的に得られるアルゴリズムの解の品質と計算時間が大きく左右される．本研究では，「M凹関数は普通の凹関数に拡張可能」という離散凸解析の成果を踏まえて，凸制約付き凹関数最大化問題として，緩和問題を定める．

・ステップ②において，緩和問題を解く効率的なアルゴリズムを構築する．本研究で扱う緩和問題は陰的(implicit)に与えられており，多項式時間で解くことは容易ではない．これを解決する一つの案として，楕円体法の利用を検討する．楕円体法は，複雑な形の最適化問題に対する多項式時間アルゴリズムを構築する際にしばしば使われてきた一般的な解法であり，申請者の過去の研究でも用いられている．楕円体法においては，「分離問題」と呼ばれる子問題の効率的なアルゴリズムを構築することが重要であるが，M凹関数の組合せ構造を上手に利用して，分離問題の解法構築を試みる．

・ステップ③において，得られた実数解を「高品質」の整数ベクトルに変換する方法を検討する必要がある．これには，緩和問題の多面体的構造を調査する必要がある．もしも緩和問題の実行可能解集合が良い構造をもっている場合は，実数解の各成分を単純に整数に丸めるだけで良い近似解が得られる可能性が高い．そうでない場合は，近年アルゴリズム理論の分野で注目を浴びている「ランダム丸め」という技法など，最新のアルゴリズム技法の利用を検討する．

平成 26, 27 年度は，もう一つのアプローチである，「ラグランジュ緩和を用いたアプローチ」に基づきアルゴリズム開発を進める．

ラグランジュ緩和とは，元の問題(NLIP-MC)の不等式制約 $g_i(x) \geqq b_i$ を除去する代わりに，解が不等式条件に違反している場合にはペナルティとして，違反の程度に応じて目的関数の値を減少させる，という緩和手法である．ペナルティの値はあるパラメータにより決定されるが，このパラメータを適切に設定することにより，元の問題の良い近似解が入手できる．

ラグランジュ緩和アプローチでは，パラメータの設定方法が重要である．パラメータを大きすぎる値に設定すると，得られる解は実行可能解ではあるものの最適解からほど遠くなり，一方，小さすぎる値にすると，得られる解は最適解に近いものの実行可能ではなくなる．本研究では，パラメータ値をより良いものへと繰り返し更新しながら，ラグランジュ緩和問題を繰り返し解き，より良い近似解を求めるという手法について検討する．また，パラメータ値を改善してもラグランジュ緩和問題から得られる解の品質が改善されない場合には，異なるパラメータ値に対するラグランジュ緩和問題の解を求めた後，それらを上手に合成して良い近似解を作る手法についても検討する．

４．研究成果

（1）ナップサック制約下での離散凹関数最大化問題に対するアルゴリズムの研究

この研究では，ナップサック制約（費用制約）の下で，粗代替性をもつ効用関数を最大化する問題を扱った．この問題は，数理経済学における交換経済や，ゲーム理論における組合せオークションのような応用において現れる．研究代表者の過去の研究では，この問題に対して，任意の近似精度の解を多項式時間で求める，多項式時間近似スキーム（PTAS）を提案した．本研究ではこの研究成果をさらに発展させて，より一般的な問題である，複数のナップサック制約の下で M 凹関数を最大化するという問題についても PTAS が存在することを示した．

この PTAS では，まず元の離散的な問題を実数変数に関する連続的な問題へと緩和し，その最適解を求め，それを使うことによって元の問題の近似解を求めるという，連続緩和アプローチを利用した．連続的な問題へ緩和する際には，目的関数である M 凹関数が連続的な凹関数に拡張可能であるという事実を用いた．さらに，この凹関数の関数値が（ほぼ）正確に多項式時間で計算できること，および各点での劣勾配が計算できることを証明した．この証明では，離散凸解析の理論における，M 凹関数と L 凹関数の共役性が鍵となっている．これらの事実と，楕円体法と呼ばれる汎用的なアルゴリズムを組み合わせることにより，連続緩和問題の最適解を多項式時間で求められることを示した．また，連続緩和問題の最適解から元の問題の近似解を計算する際には，緩和問題の最適解として，端点最適解を使う，と言うアイディアを利用した．そのような端点最適解は整数解とは限らないが，非常に多くの成分が整数値を取ることを証明した．これにより，端点最適解を適当な方法で整数ベクトルに丸めると，十分良い精度の近似解が得られることがわかった．

本研究ではまた，ナップサック制約の下で，2 つの M 凹関数の和を最大化するという問題についても扱った．2 つの M 凹関数の和で表現できる関数のクラスは，M 凹関数のクラスより広いため，求解がより困難な問題ということになる．この問題に対しては連続緩和アプローチの適用は難しいため，ラグランジュ緩和によるアプローチを用いた．ラグランジュ緩和問題を利用することにより，目的関数値が十分大きいが，制約を若干違反している解，および目的関数が若干小さいが，制約を満たしている解の２つを求めることができるが，これらの解を利用して，元の問題の良

質な近似解を求める．目的関数の非線形性により，上記の２つの解から如何にして良い近似解を得るか，というところで困難が生じたが，離散凸解析における過去の研究結果をうまく利用することにより，良い近似解を得ることに成功した．

本研究成果は非常に高く評価され，最適化分野においてトップクラスの国際論文誌である Mathematics of Operations Research 誌に掲載された．

（２）財の最適配分問題に対するアルゴリズムの研究

オークションなどで現れる財の配分問題では，均衡配分を求めることが目的である．この問題は，財の分割の中で効用関数の値の和を最大化する問題と等価であることが知られている．本研究では，効用関数が粗代替性という自然な性質を満たす場合において，この問題が効率的に解けることを示した．提案アルゴリズムは，効用関数の粗代替性が離散凸解析における M 凹性と等価であること，および離散凸解析における双対性を利用したものとなっている．

本研究ではまず，財の均衡配分を求める問題を，財の均衡価格を求める問題に置き換えてアルゴリズムの開発を進めた．財の均衡価格が与えられたとき，その情報を用いることで財の均衡配分が（比較的）容易に計算できることが知られていた．これら２つの問題を離散凸解析の観点から理解を行い，財の均衡配分を求める問題がＭ凹関数の最大化に対応し，財の均衡価格を求める問題がＬ凸関数の最小化問題に対応し，それらの問題が双対の関係にあることを明らかにした．この理解により，財の均衡配分・均衡価格を求める問題に対し，離散凸解析のこれまでの研究成果が利用可能であることがわかった．とくに，財の均衡価格を求める問題に対しては，数理経済学の分野において「繰り返しオークション」と呼ばれるアルゴリズムが提案されていたが，これは離散凸解析におけるＬ凸関数最小化の最急降下法に一致することがわかった．この関係を利用して，本研究ではさらに新たな繰り返しオークションの開発を行い，解の変化がほぼ単調という，オークションの観点から望ましい性質を満たすアルゴリズムを提案した．

また，L 凸性を利用することにより，繰り返しオークションの厳密な反復回数を示すことに成功した．反復回数の解析においては，アルゴリズムの各反復において，現在の解が均衡解への距離を１ずつ減らすように近づくことを示した．このことより，アルゴリズムの反復回数は初期解と出力される均衡解の距離に等しいことがわかり，またアルゴリズム中での解の軌道は均衡解への最短路をたどっていることが示された．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　９件）

① Kazuo Murota, <u>Akiyoshi Shioura</u>, and Zaifu Yang: Time Bounds for Iterative Auctions: A Unified Approach by Discrete Convex Analysis. Discrete Optimization, 19 (2016), 36-62. 査読有
DOI: 10.1016/j.disopt.2016.01.001

② <u>Akiyoshi Shioura</u> and Zaifu Yang: Equilibrium, Auction, and Generalized Gross Substitutes and Complements. Journal of Operations Research Society of Japan, 58 (4) (2015), 410-435. (open access) 査読有
DOI: 10.15807/jorsj.58.410

③ Yoshiko T. Ikebe, Yosuke Sekiguchi, <u>Akiyoshi Shioura</u>, and Akihisa Tamura: Stability and Competitive Equilibria in Multi-unit Trading Networks with Discrete Concave Utility Functions. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 32 (2) (2015), 373-410. 査読有
DOI: 10.1007/s13160-015-0175-7

④ <u>Akiyoshi Shioura</u> and Akihisa Tamura : Gross Substitutes Condition and Discrete Concavity for Multi-Unit Valuations: A Survey. Journal of Operations Research Society of Japan, 58 (1) (2015), 61-103. (open access) 査読有
DOI: 10.15807/jorsj.58.61

⑤ <u>Akiyoshi Shioura</u>, Natalia V. Shakhlevich, and Vitaly A. Strusevich: Decomposition Algorithms for Submodular Optimization with Applications to Parallel Machine Scheduling with Controllable Processing Times. Mathematical Programming, 153 (2) (2015), 495-534. (open access) 査読有
DOI: 10.1007/s10107-014-0814-9

⑥ <u>Akiyoshi Shioura</u>: Polynomial-Time Approximation Schemes for Maximizing Gross Substitutes Utility under Budget Constraints. Mathematics of Operations Research, 40 (1) (2015), 171-191. 査読有
DOI: 10.1287/moor.2014.0668

⑦ Kazuo Murota and <u>Akiyoshi Shioura</u>: Dijkstra's Algorithm and L-concave Function Maximization. Mathematical Programming, 145 (1-2) (2014), 163-177. 査読有

DOI: 10.1007/s10107-013-0643-2

⑧ Akiyoshi Shioura, Natalia V. Shakhlevich, and Vitaly A. Strusevich: A Submodular Optimization Approach to Bicriteria Scheduling Problems with Controllable Processing Times on Parallel Machines. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 27 (1) (2013), 186-204. 査読有
DOI: 10.1137/110843836

⑨ Akiyoshi Shioura: Matroid Rank Functions and Discrete Concavity. Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 29 (3) (2012), 535-546. 査読有
DOI: 10.1007/s13160-012-0082-0

〔学会発表〕（計 8件）

① Kazuo Murota and Akiyoshi Shioura, "Exact Bounds for Steepest Descent Algorithms of L-convex Function Minimization", 22nd International Symposium on Mathematical Programming, ピッツバーグ（アメリカ）, 2015年7月16日

② 塩浦昭義,「L凸関数の最小化アルゴリズム:離散凸解析と諸分野との繋がり」, 第27回RAMPシンポジウム, 静岡大学浜松キャンパス（静岡県・浜松市）, 2015年10月15日

③ Akiyoshi Shioura, Natalia V. Shakhlevich, and Vitaly A. Strusevich, 「Speed Scaling Scheduling Viewed from Submodular Optimization」, 応用数理学会研究部会連合発表会, 明治大学中野キャンパス(東京都・中野区), 2015年3月6日

④ Akiyoshi Shioura, Natalia V. Shakhlevich, and Vitaly A. Strusevich, 「Energy Optimization in Speed Scaling Models via Submodular Optimization」, 電子情報通信学会コンピュテーション研究会, 崇城大学（熊本県・熊本市）, 2014年12月5日

⑤ Kazuo Murota, Akiyoshi Shioura, "Dijkstra algorithm viewed from discrete convex analysis", 8th Japanese-Hungarian Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, ヴェシュプレーム（ハンガリー）, 2013年6月5日

⑥ 塩浦昭義,「L凸関数の最小化：離散凸解析から広がる世界」, 研究集会「最適化の理論と応用 -- 未来を担う若手研究者の集い 2013 --」, 筑波大学（茨城県・つくば市）, 2013年6月29日

⑦ Akiyoshi Shioura, "Minimization Algorithms for Discrete Convex Functions," RIMS Workshop on Discrete Convexity and Optimization, 京都大学数理解析研究所（京都府・京都市）, 2012年10月15日

⑧ Akiyoshi Shioura, "Computing the Convex Closure of Discrete Convex Functions," 21st International Symposium on Mathematical Programming, ベルリン（ドイツ）, 2012年8月23日

〔図書〕（計 1件）

① 室田一雄, 塩浦昭義:「離散凸解析と最適化アルゴリズム」, 朝倉書店, 2013年, 210ページ(1-210)

6．研究組織

(1)研究代表者
塩浦 昭義（SHIOURA, Akiyoshi）
東京工業大学・大学院社会理工学研究科・准教授
研究者番号：10296882

(2)研究分担者
（　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　）

研究者番号：