様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２７　年　　６　月　１６　日現在

機関番号：１３４０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５０００１１

研究課題名（和文）制約充足問題の最適解近似アルゴリズムを高速化する制約条件の簡単な識別方法

研究課題名（英文）How to select constraints that help algorithms approximately solve constraint satisfaction problems

研究代表者
山上　智幸（YAMAKAMI, TOMOYUKI）

福井大学・工学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：８０２３０３２４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　4,100,000円

研究成果の概要（和文）：制約充足問題は、与えられた制約条件を満足する解を求める問題であり、日常現れる問題の一種である。制約充足問題を効率良く解くアルゴリズムと制約条件の関係を解析し、アルゴリズムの効率化が可能となる制約条件の種類・形状を発見し、未解決であった解の値の総和を近似するブール変数を有する数え上げ制約充足問題の完全な分類を行った。また、数え上げ制約充足問題の２極値定理の応用として、リスト行列グラフ分割数え上げ問題の分類に成功した。更に、理論的な多項式時間計算と異なり、より現実的な対数記憶領域計算モデルや、記憶デバイスをスタック方式に限定した計算モデルを使い、組み合わせ最適化問題に新たな研究領域を切り開いた。

研究成果の概要（英文）：Constraint satisfaction problems (CSPs), which are problems of finding feasible solutions that satisfy given sets of constraints, appear frequently in daily life. By analyzing a close relationship between constraints and the efficiency of algorithms that solve those CSPs, I discovered the exact conditions on constraints to make solving algorithms faster, and this discovery helps me classify all counting Boolean CSPs according to their approximate computational complexity. As a direct application of a dichotomy theorem for counting CSPs, I successfully classified all counting list partition problems. Unlike rather theoretical polynomial-time computation, I examined logarithmic-space machine models and automata with pushdown stacks as memory devices, and explored a new frontier in a field of combinatorial optimization problems.

研究分野：計算量理論、アルゴリズム理論、最適化問題

キーワード：制約充足問題　最適化問題　数え上げ問題　アルゴリズムの効率　＃P完全　対数領域計算　プッシュダウンオートマトン　２極値定理

1．研究開始当初の背景

コンピュータチップの性能はほぼ Moore の法則通りに向上を続け、計算機の処理能力は飛躍的に高まっている。しかし、鉄道網での列車の効率的な運行表の作成や集配した宅配物の効率的な配送計画作成などの様な一見単純に見える問題でも、未だに計算機には手におえないものである。これらに共通しているのは、与えられた条件（「制約条件」と呼ばれる）を満たす解を求めることを目標としている点である。このような問題は、日常生活の中に頻繁に現れ、多変数に関するある種の制約条件を全て満足する値の組み（解）を求めるものである。任意の解を求める代わりに、最適な解を求めたり、単に解の総数を求めたりする場合も多い。この様な問題がいわゆる「制約充足問題」であり、極めて実用性の高い計算問題の一つである。単純な制約充足問題としては、与えられた連立１次不等式を満たす解を求める問題（線形計画法と呼ばれる）がある。ここでは、制約条件はそれぞれの１次不等式であり、その中に現れる変数は使途に応じて整数値であったり実数値であったりする。

しかし現実的な問題になると、制約条件の数は数百から数千にも上り、多数の変数が取り得る全ての値の組について制約条件の成否を調べるには単純に時間が掛かり過ぎ、現実的でないことが多い。こうした問題は実用性が高いため様々な分野において計算機で解くことが試みられているが、問題を効率良く解くためのソフトウェアは数少ない。一般的には、制約充足問題は解くのが困難であり、汎用性のある効率的な解法アルゴリズムの存在は知られていない。制約充足問題を解くアルゴリズムの効率を分析し、問題をその複雑さ（計算量）ごとに分類することは、ソフトウェア開発にとっても資源や資金の節約に繋がり、今後のソフトウェア開発が容易になることが期待される。

ブール変数に関する制約条件に話を限ると、1970 年代以降、制約充足問題の計算の複雑さ（計算量）による分類が着実に進められてきた。特に制約条件がブール値を取る場合、制約充足問題に解が存在するか否かを判定する問題に対し、Schaefer (1978) が初めて２極値定理を証明し、これによって、全ての制約充足問題がその複雑さによって分類された。ここで言う２極値定理とは、「全ての制約充足問題が多項式時間で解けるか、そうでなければ NP 完全である」ことを主張するものである。また、解を直接求める代わりに制約条件を満たす解の総数（又は、解の値の総和）を求める問題は、一般に「数え上げ問題」と呼ばれ、近年効率的な解法アルゴリズムが精力的に研究されている。Crignou・Herman (1996) は、制約条件がブール値を取る数え上げ制約充足問題 #CSP に対して２極値定理を証明した。つまり、「解の値の総和を多項式時間で求められるか、又は #P 完全であるかの何れかである」ことを示した。ここで、「#P 完全」な問題とは、解の正誤を多項式時間で判定できる数え上げ問題全体の中で最も難しい問題のことである。この結果は、Dyer・Goldberg・Jerrum (2009) や Cai・Lu・Xia (2009) によって最終的に複素数値の場合まで拡張された。

これらの厳密解を求めるケースに対し、近似解を求めるアプローチでは、Dyer・Goldberg・Jerrum (2010) がブール値を取る制約条件を持つ場合に３極値定理が成り立つことを示した。この３極値定理は、対象となる全ての問題が「多項式時間で解けるか、#P 完全であるか、又はその中間であるか、の何れかである」ことを主張する。各変数が現れる制約条件の数（次数）が制限されたときには、Dyer・Goldberg・Jalsenius・Richerby (2010) がほぼ３極値定理を証明したが、ブール値以外の値を取る制約条件に関しては未解決であった。次数が２の場合は特別に難しく、前述の Cai らによる厳密解に関する結果が知られているのみで、近似解に関する研究は無かった。

これまで述べてきた結果は１変数の制約条件を自由に使用できるモデル（「保守的」なモデル）を用いたものであった。保守的なモデルの利点は、１変数制約条件を使って複雑な制約条件を簡略化できることである。これに対し、非保守的なモデルを用いた研究は、その解析の難しさから未だ十分に進んでいない。

近年発展し広く利用されている携帯端末やタブレット端末の様な小型機器では、その形状から記憶容量が限られている。この様な小さな記憶デバイスを用いた計算が今後主流になると予見されるが、これらのデバイスではスーパーコンピュータ仕様のアルゴリズムを走らせることはできない。従って、新たに小型デバイスの枠組みの中で、アルゴリズムの効率の研究が必要となる。最適化問題に関しては、これまでに Tantau (2007) が、入力長の対数程度の記憶領域に限った最適化問題の枠組みを提案し、いくつかの対数領域最適化問題（NLO）の中で、NLO 完全となる問題を示した。しかし、その後の研究は進んでいない。記憶領域制限の計算では、通常取り扱う実行時間制限の計算とは異なり、一度に取り扱える記号列の数が格段に少ない。そのため、アルゴリズムの分析手法も多項式時間計算モデルでのものとは大きく異なる。しかも対数記憶領域計算モデルでは、問題の

還元性などの概念が十分に発展していないため新しく理論を展開する必要があった。またこの他の制限された計算モデルについての研究も不十分であり、これらを補完する研究が強く望まれていた。

2. 研究の目的

制約充足問題全てが計算困難なわけでは無く、高速な解法アルゴリズムが知られている問題もある。従って、制約充足問題の計算量は、使用される制約条件の種類・形状によって大きく異なる。ここで言う「問題の計算量」とは、一般にはその問題を解くアルゴリズム（又はプログラム）の実行過程で必要となる計算資源の最小量を指す。（この計算量を分析・評価するのが計算量理論である。）「計算資源」には、計算機でのプログラムの実行時間や記憶デバイスの使用領域、更に基本動作を行う論理ゲートの総数などがある。

本研究の目的は、制約充足問題の解法アルゴリズムが高速化可能となる制約条件を簡単に識別するための方法論を確立することであり、これによって、一般社会での解法ソフトウェア開発が容易になると考えられる。

このために、制約条件の値をこれまでの研究で扱われたブール値や非負の有理数値から一般の複素数値まで拡張する。保守的な数え上げ制約充足問題について、まず Dyer・Goldberg・Jerrum (2010) の結果を発展させ、複素数値を取る数え上げ制約充足問題の２極値定理を証明する。次数が制限された場合に対しては、Dyer・Goldberg・Jalsenius・Richerby (2010) の３極値定理の結果を拡張し、複素数値数え上げ制約充足問題 #CSP について２極値定理を証明する。更に、保守的で無い数え上げ制約充足問題に対し、実数値を取る対称的な制約条件を有する特殊な場合に、２極値定理定理が成り立つことを示す。

以上述べた目標は、多項式時間計算を基準にして「アルゴリズムの効率」を考えた場合である。しかし先に述べた通り、携帯端末やタブレット端末では記憶デバイスが矮小な為に、メモリを大量に消費する高速計算の実行は不可能である。本研究では、アルゴリズムの「効率化」の条件を再考し、通常の多項式時間計算の他に、制限された記憶容量で実行可能な計算、特に「対数領域計算」を考える。ここで対数領域計算とは、入力のビット長を n としたとき、計算途中で使用されるメモリ量を n の対数程度に制限した計算である。例えば、対数領域では入力の各ビットの記号の位置情報を一つづつ記憶することはできるが、入力全ての複写をすることは不可能である。

この対数領域計算を効率化の新たな基準として、最適化問題を対数領域計算の見地から再構成することを目指す。特に、Tantau (2007) の対数領域最適化問題に関する成果を継承し、新たに「回路還元性」などの概念を導入し、最適化問題を議論する基礎理論を展開する。ここで言う「還元性」とは、ある問題 A を解く為に、別な問題 B をオラクルとして利用し、そのオラクルの解を基に問題 A を効率良く解くというものであり、計算量理論では一般に問題の難しさの尺度としても用いられている。また、制限のある計算モデルとして有限オートマトンや非決定性プッシュダウンオートマトンを使って「CFL 還元性」などの概念を定義し、構造的な計算量理論の基礎を構築する。こうした基礎的な研究のソフトウェア開発への貢献が十分期待できる。

3. 研究の方法論

本研究では、ブール変数を有する制約条件を持つ制約充足問題に焦点を合わせる。この様な問題を分析する基礎的な手法として、まず、制約充足問題をグラフの問題として捉え直す。各変数を一方の頂点、制約条件を他方の頂点とし、変数と制約条件の関係を辺としてグラフを構築すると、制約充足問題をグラフ化することができる。また、このグラフの変数側の各頂点の次数（頂点に接続している辺の数）をある一定数に抑えたグラフを用いると、次数制限付きの制約充足問題を取り扱うことも可能である。また、複素数値制約条件を持つ制約充足問題に対しても、重み付きグラフで対応できる。このようにして得られたグラフの形を自由に変形する手法で、効率的な解法アルゴリズムを構築する。また反対に、数え上げ制約充足問題に効率的なアルゴリズムが存在しない場合、多項式時間近似還元性（「AP 還元性」と呼ばれる）の概念を用いて、問題自体が #P 完全であることを証明する。

本研究では、これまで研究されていたブール値や非負の有理数値を取る制約条件の値を複素数まで拡張して２極値定理を証明するために、保守的な制約条件の基本的な性質を利用する。この性質を使って、複素数値制約充足問題に対し、その解の値の総和を近似的に求める多項式時間アルゴリズムが存在するために制約条件が満たすべき形状・種類を明らかにする。最も困難な点は、この条件を満たさない数え上げ制約充足問題 #CSP は全て #P 完全である事を証明することである。この完全性を示すために、各種の「構成可能性」の概念を導入する。この概念は、与えられた制約条件をいくつかの基本操作によって別な制約条件に書き換えるものであり、帰

納法と組み合わせて #P 完全性の証明に用いる。

4．研究成果

2012 年 4 月から 2015 年 3 月までの 3 年間の研究により得られた成果を、(1) 複素数値を持つ制約充足問題の計算量の分析、(2) 次数が制限された制約充足問題の計算量の分析、(3) 非保守的な制約充足問題の計算量の分析、(4) リスト行列グラフ分割問題への応用、(5) 最適化問題の対数領域計算の基礎理論の構築、(6) 記憶媒体が制限された計算モデルの分析、の各研究項目ごとに簡単に解説する。

（１）［複素数値を持つ制約充足問題の計算量の分析］与えられた制約条件をすべて満足する解の値の総和を求める問題は、単に解が存在するか否かを判定する問題より一般に難しいと考えられ、本研究では、ブール変数を取り扱う制約条件を有する数え上げ制約充足問題 #CSP の計算の難しさ（計算量）を考察した。この数え上げ問題の計算量を制約条件の形状・種類ごとに量り、その量によって問題の分類を行った。総和を厳密に求める Cai・Lu・Xia (2009) の研究と大きく異なり、近似解を求める研究では、Dyer・Goldberg・Jerrum (2010) が、ブール値を取る制約条件（「重み無し」とも呼ばれる）を持つ数え上げ制約充足問題に対して 3 極値定理を証明している。更に Dyer らは 3 極値の明確な判定基準も示している。

本研究では、一般に複素数まで拡張した重みを持つ数え上げ制約充足問題 #CSP を取り扱い、効率的な近似解法アルゴリズムが存在するために必要な制約条件の形状・種類を正確に求めた。これまでは、ブール値或いは非負の有理数値を取る制約条件についての結果が知られていたのみであり、複素数値制約条件の研究は初めてである。一変数制約条件は無条件に使用できるとする「保守的」な条件下で、解の値の総和を近似的に求める問題を分析し、多項式時間で計算が終わる効率の良いアルゴリズムが存在するための必要十分条件を発見した。前述の Dyer らの結果は 3 極値定理であったが、本研究では複素数値制約条件を有する数え上げ制約充足問題に対して 2 極値定理を証明した。この証明のため、特に「T 構成可能性」と呼ぶ概念を新たに導入した。

もう少し詳しく説明すると、制約条件が等号と不等号から成る集合 ED に属しているならば、対応する数え上げ制約充足問題は多項式時間で近似的に解くことができる。反対に、ED に属さない場合には、制約充足問題は AP 還元性を用いて、#P 完全であることが既に知られている問題 #SAT から還元される。ここで、#P 完全性の証明には、AP 還元性を用いている。従って、この問題は #P 困難であることが示される。

以上の結果は専門誌 Information and Computation に掲載された。

（２）［次数が制限された制約充足問題の計算量の分析］一般に、制約条件に現れる変数に制限を付けると、解法アルゴリズムの効率が変化する。実際の制約充足問題では、制約条件に次数制限のある場合が多い。各々の制約条件が高々次数 d（$d \geq 3$）である重み無し問題に限ると、Dyer・Goldberg・Jalsenius・Richerby (2010) は次数が 3 以上の数え上げ制約充足問題 #CSP は次数 3 の場合に帰着されることを示し、これら問題に対して 3 極値定理を証明している。本研究では、特に複素数の重み付き問題を分析し 2 極値定理が成り立ことを発見した。

定理の証明の流れは次の通りである。まず、任意の高次数え上げ制約充足問題 #CSP を、等号から成る制約条件の集合 EQ を持つ次数２の #CSP 問題に AP 還元する。次にこの問題をある種の制約条件を持つ次数 3 の数え上げ制約充足問題に AP 還元する。最後に、次数制限無しの一般の 2 極値定理を応用して、次数 d の場合の 2 極値定理問題を得る。こうして有限次数の数え上げ制約充足問題に関して 2 極値定理を証明することができる。上記の証明では、制約充足問題が保守的な性質を持つことが重要な要件であり、また、EQ を有する次数 2 の問題から次数 3 の問題への還元には、制約条件の構成可能性を用いた。通常の T 構成可能性は次数に関する条件が無く、そのままでは使用ができない為、次数についての条件を更に付加した「限定 T 構成可能性」を新たに導入した点が評価される。

また、次数が２以下の場合では、以下のことを示した。次数 1 に制限した数え上げ制約充足問題は多項式時間で解くことができる。次数 2 の問題は、Holant 問題と呼ばれる問題と密接な関係があり、この関係を使って、制約条件が実数値を取り更に対称形をしている特別な場合について 2 極値定理を証明した。この証明には、特殊な形状の「T_2 構成可能性」を使用した。

これらの成果は論文 2 編にまとめられ、専門誌 Theoretical Computer Science に掲載された。

（３）［非保守的な制約充足問題の計算量の分析］保守的で無い制約充足問題の解を数え上げる問題は長らく未解決であった。本研究では、実数値を取る制約条件が対称形をして

いる場合において、非保守的な数え上げ制約充足問題 #CSP の効率的な近似解法アルゴリズムが存在する為に制約条件が満たすべき必要十分条件を示した。この結果によって、現実の制約充足問題を取り扱うソフトウェア開発が今後容易になることが期待される。

この証明のために、1 変数の制約条件の中でも特に重要な役割を果たす「定数値制約条件」（定数 0 又は 1 の値を取る 2 つの制約条件）が、任意の実数値対称性制約条件の集合から構成可能であることを発見した。このことから、ある適切な条件下では数え上げ制約充足問題が多項式時間で解決でき、それ以外では、ある特殊な制約条件 g を持つ制約充足問題から AP 還元可能であることが分かった。この還元可能性の証明に利用したのは、新たに導入した「効率的 T 構成可能性」である。この概念は先に見た、T 構成可能性や制限付き T 構成可能性とは異なり、制約充足問題をグラフ化したときに、単純なグラフの形状変形で新たな制約充足問題が得られることを要求するものである。ここでは、制約条件 g の形状は明確に定義されている。この結果は、非保守的な数え上げ制約充足問題の完全な分類に一歩近づくものである。

これらの結果はアメリカ合衆国のダラスで開催の国際会議 ISAAC 2012 で口頭発表し、これに証明などを書き加えた論文は、専門誌 Theory of Computing Systems に掲載された。

（4）［リスト行列グラフ分割問題への応用］制約充足問題の応用として、リスト行列グラフ分割問題の計算量を分析し、問題の完全な分類を行った。このグラフ分割問題は、有限リスト行列によって生成されるグラフを固定し、入力グラフをこのグラフで分割した時、この「分割」の総数を求める問題である。ここで言う分割とは、入力グラフから固定グラフへの同型写像のことであり、リスト行列はグラフの頂点と辺との間の関係を規定するパラメタとして機能している。

リスト行列グラフ分割問題は様々な通信網設計などに用いられるグラフ関連問題のある種の一般化と考えられるため、関連する問題の解法アルゴリズムの開発に有益な応用が見込まれる。

この問題自体は、 Feder・Hell・Klein・Motwani (2003) らによって研究されたリスト行列によるグラフ分割可能性判定問題を数え上げの視点から再考したものである。リスト無しの数え上げグラフ分割問題では、近年 Hell・Herman・Nevisi (2012) らが 3 行 3 列行列の場合に問題の完全な分類を行ったが、一般の行列に関しては未解決であった。

本研究では、リスト行列グラフ分割問題をある種の数え上げ制約充足問題に還元することで解決した。もう少し詳しく述べると、リスト有りの一般的な n 行 n 列行列について、数え上げの利点を活かして、特殊な制約条件を満足する数え上げ制約充足問題 #CSP に帰着するという画期的な手法を用いて、2 極値定理が成り立つことを示し、問題の完全な分類に初めて成功した。ここでの最大の貢献は、リスト行列グラフの形状による完全な分類を行った点と共に制約充足問題への帰着のアイデアである。また、#P 完全で無い問題に対し、新しい効率的解法アルゴリズムを開発した点が優れている。

これは、オックスフォード大学の Goldberg 教授率いる研究チームと共同で行った研究の成果であり、2014 年 6 月にカナダのバンクーバーで開催の国際会議 CCC 2014 で発表した。また、省略されていた証明などを書き加えた論文は専門誌 SIAM Journal on Computing に投稿中である。

（5）［最適化問題の対数領域計算の基礎理論の構築］日常使用される携帯端末やタブレット端末のような小型メモリを持つ計算モデルでは、多項式時間計算量では分類不可能な最適化問題が数多く存在する。そこで、新たにアルゴリズムの効率として対数記憶領域計算量を考え、これによる最適化問題の分析を行い、問題のより詳細な分類を行った。

「対数領域」計算では、入力長を n とした場合に n の対数に比例する記憶領域のみを使用して計算を実行する。この場合、記憶領域が n 以下である為、通常の 1 テープのチューリング機械ではなく、読み取り専用の入力テープと書き換え自由の作業テープを持つ機械を用いるが、作業テープは n の対数に比例する領域しか使用できないとする。例えば、グラフの 2 頂点間の最短経路を見付ける最適化問題は対数領域で解くことが可能な問題である。

これまでに、Tantau (2007) が対数領域計算を基に最適化問題を考察し、対数領域還元性の概念を用いて、幾つかの最適化問題が完全であることを示している。本研究では、Tantau の概念の詳細な分析を通して、対数領域還元性では不十分なことを示し、その代わりにより計算能力を制限した「論理回路還元性」の概念を新たに導入した。この新しい還元性を用いて、前述の対数領域領域最適化問題 NLO や対数領域計算で近似可能な解を持つ最適化問題のクラス APXL の中でもっとも難しい問題を例示した。例えば、グラフ最小混合経路探索問題は、この還元性を使って、APXL 完全であることが証明できる。本研究の特筆すべき点は、より精密な論理回路還元性の概念を用いた新しい分類方法を確立し、分類の精度を飛躍的に上げたことである。

この成果は2013年12月に中国の成都で開催された国際会議 ISAAC 2013 で口頭発表を行った。

（６）［記憶媒体が制限された計算モデルの分析］これまで見てきた多項式時間計算や対数領域計算とは異なり、記憶デバイスがほとんど無い場合やスタック（先入れ後出し）方式に限られている場合の計算について考察した。腕時計型デバイスや携帯端末などを用いた計算では、記憶容量やデバイスへのアクセスなどに制限があり、これらに対応した計算モデルを分析する必要がある。これらデバイス上での実際の計算を分析する為に、計算モデルとして、特に有限オートマトンやプッシュダウンオートマトンを用いた。これらは数十年に渡って研究されているモデルであるが、これまで計算量の比較の為に必要な還元性の概念が欠如していた。

これを補完する目的で、本研究では、有限オートマトンやプッシュダウンオートマトンに外部情報への自由なアクセスを許可することで、新たに「CFL還元性」の概念を導入した。この還元性では、外部のデバイスをオラクルとし、これに通信回線を通してアクセスすることで、与えられた問題をスタック記憶デバイスを用いて計算する。非決定性プッシュダウンオートマトンで認識される言語（問題）は一般に文脈自由言語（CFL）と呼ばれるが、CFL還元性によって、文脈自由言語のクラスを拡張することが可能となる。更に、文脈自由言語をオラクルとして帰納的に用いることで、言語クラスの特殊な階層を構成することができ、既存の多項式時間階層と同様に、これを「CFL階層」と呼ぶ。このCFL階層は、言語の計算量を測る指標ともなり得る。本研究では、CFL還元性の基本的な性質や役割を明らかにすることで、この階層の有益性を示した。

この結果はスロバキアのハイ・タトラスで開催された国際会議 SOFSEM 2014 で口頭発表している。省略された証明を加えた完全版は、現在専門誌に投稿中である。

5．主な発表論文等

［雑誌論文］（計10編）

① T. Yamakami. "Constant unary constraints and symmetric real-weighted counting constraint satisfaction problems." Theory of Computing Systems, vol.55, pp.170-201, 2014.

② T. Yamakami. "Approximation complexity of complex-weighted degree-two counting constraint satisfaction problems." Theoretical Computer Science, vol.461, pp.86-105, 2012.

③ T. Yamakami. "A dichotomy theorem for the approximate counting of complex-weighted bounded-degree Boolean CSPs." Theoretical Computer Science, vol.447, pp.120-135, 2012.

④ T. Yamakami. "Approximate counting for complex-weighted Boolean constraint satisfaction problems." Information and Computation, vol.219, pp.17-38, 2012.

［国際会議論文］（計9編）

① A. Göbel, L. A. Goldberg, C. McQuillan, D. Richerby, and T. Yamakami. "Counting list matrix partitions of graphs." In the Proceedings of the IEEE 29th Conference on Computational Complexity (CCC 2014), pp.56—65, 2014.

② T. Yamakami. "Oracle pushdown automata, nondeterministic reducibilities, and the hierarchy over the family of context-free languages". In the Proceedings of the 40th International Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science (SOFSEM 2014), Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, vol.8327, pp.514—525, 2014.

③ T. Yamakami. "Uniform-circuit and logarithmic-space approximations of refined combinatorial optimization problems". In the Proceedings of the 7th Annual International Conference on Combinatorial Optimization and Applications (COCOA 2013), Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, vol.8287, pp.318—329, 2013.

［招待講演］（計1編）

① T. Yamakami. "Approximation classification of complex-weighted counting CSPs." Dagstuhl Seminar 13031 - Computational Counting, Schloss Dagstuhl, Leibniz-Zentrum fur Informatik, Germany, 2013年1月15日.

［研究会発表］（計7編）

① T. Yamakami. "Oracle pushdown automata, nondeterministic reducibilities, and the hierarchy over the family of context-free languages (preliminary version)." 電子情報通信学会 コンピュテーション研究会、鳥取環境大学、2013年9月3日.

［その他］

研究ホームページ

http://TomoyukiYamakami.ORG

6．研究組織

（1）研究代表者：

山上智幸（Tomoyuki Yamakami）

福井大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号：80230324