様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ９ 月 ３０ 日現在

機関番号：２５１０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５３０２２３

研究課題名（和文）インプライドデータの統計分析

研究課題名（英文）Statistical Analysis of Implied Data

研究代表者
高橋　一（TAKAHASHI, Hajime）

鳥取環境大学・その他部局等・教授

研究者番号：７０１５４８３８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：倒産の可能性を持つ企業等が発行する債券価格の決定メカニズムが内包するパラメータの統計学的な推定が本研究の目的である。Duffie+Singleton(1999)は企業倒産を停止時刻で表現することにより理論を構築した。そこで、倒産時刻を決定するHazard関数の推定が問題となる。本研究では市場に於ける債券価格よりImpliedにHazard関数の推定を行ってきている。基本となるのはTakahashi(2011,APFM)である。問題は推定等はリスク中立世界で行われ実世界に於ける倒産確率との比較が困難である。本研究ではリスク中立で求められた推定量を実確率の世界に変換する方策を探求した。

研究成果の概要（英文）：We consider the conditions under which the estimators obtained impliedly by calibration. The underlying theory is presented by Takahashi (2011, APFM),the results are given under the Martingale Measure though.Takahashi(2011) considers only a special case, where the default is independent from the other economic factors underlying the basic model. In this case, Martingale measure is equal to the real world probability. We consider the methodof Ross, which is proved to be not suitable for our problem. We consider the measure change, Radon Nikodym theorem and the strong law of large numbers are key tool. We shall consider more realistic case in the next project.

研究分野：統計ファイナンス

キーワード：Implied Data　Credit Risk　Measure Change　Liquidity

１．研究開始当初の背景

近年計算コストの低廉化と計算スピードの画期的な進歩により数理ファイナンスモデルを数値的に推定することがより容易に行われるようになって来ている。その際、多く見られるのがカリブレーションと総称される方法である。同時にBlack-Scholesモデル（以後B-Sモデルと書く）をベースにしたインプライドボラティリティー（Implied Volatility）の導出に見られる様に、株式価格、オプション価格、利子率等を所与としボラティリティーを逆算する事も日常的に行われている。問題は、推定されたパラメータや導出されたインプライドボラティリティーに含まれる誤差を如何に評価すべきかである。本研究ではこの問題を先ず、社債と国債との間に存在する金利スプレッドと当該企業の倒産確率の関係に注目し、市場で観測可能な金利スプレッドを所与（データ）とし当該企業の倒産確率をインプライドに推定した時の統計学的問題を考察する示す事により推定方法（最小二乗法）を正当化した後、例として簡単な実証分析を行っている。そこでは、極限分散を用い推定誤差を求める代わりにBootstrap法が使われている。これは漸近分散そのものを推定することが数値的にも困難であることと対象企業や格付けのクラスに依ってはデータ数が十分でない事による。　Takahashi(2010)では実証的にもある程度の満足な結果は得られているが、理論的にはさらなる検討を要する単純化と仮定が置かれて居り、その検証並びに実証研究に適合する一般化が次なる課題となってた。

一方、Takahashi(2010)で提唱されたモデル方法を他の問題、例えば上述のインプライドデータにあてはめパラメータの推定を行った際、その統計学的な性質はどの確率空間で評価すべきかという問題が浮かび上がってくる。研究開始当初ではその点までは考えず、時系列データ等への拡張を考えていた。同時に、幾つかの外生変数について、その内生化を意図していた。

具体的には現時点０に於いて観測される時点ｔを満期とする社債の市場価格は

$$P(0,t)+\sigma h(t)\,\varepsilon(t),$$

であると仮定、ここで $P(0,t)$ は社債の理論価格、$h(t)$ は $P(0,0)= P^*(0,0)=1$ より $h(0)=0$ を満たす関数である、但し $P^*(0,t)$ は時点ｔを満期とする倒産の危険を持たないゼロクーポン債の時点０価格である。σ は未知のパラメータ、幾つかのデータ解析結果より $h(t)=[1-P^*(0,t)]^{\alpha}$ と仮定している。$\varepsilon(t)$ は互いに独立な平均0, 分散1の確率変数である。さてインプライドな生存関数 $S(t)$（と言うより $S(t)^{1-\delta}$）は、D-Sモデルの基で α を既知とすると以下の様に単純化出来る。

$$S(t)^{1-\delta}=\left\{\exp\left\{\log\left[\frac{P(0,t)}{P^*(0,t)}+\sigma\rho(t)\varepsilon(t)\right]\right\}\right\}$$

$$=G(t)^{1-\delta}+\sigma\rho(t)\varepsilon(t) \qquad (A)$$

但し、$\rho(t)=\frac{h(t)}{P^*(0,t)}$。　そして

$G(t)=\left[\frac{P(0,t)}{P^*(0,t)}\right]^{\frac{1}{1-\delta}}$ は当該企業の生存関数の理論値である。従って α が既知の時、式（A）の各項を $\rho(t)$ で除する事により上記モデルは本質的に均一分散モデルとなり理論的な分析は比較的容易であった。そこで、本研究の１つの目的は上記 α の内生化である。

２．研究の目的

Takahashi（2011）で提唱された方法の検証である。昨年度までは主に、カリブレーション等で求められた推定量の漸近的性質が保証される条件が実際に成り立っているかを検証する。その為に、第一にやらなければならないことは、実際に求められた倒産確率が現実の倒産確率と整合しているかを観測することが必要である。その、視点に立つことにより、2012 年度と 2013 年度は主に、測度変換を考察してきた。2014 年度では、Takahashi(2011) で挙げられている例は、リスク中立確率と実確率とが同一のものとなってしまうため、単純化が進みすぎ余り実用的ではない。そこで、本研究代表者と過去 30 年以上交流のある Shozo Mori 博士（System & TechnologyResearch,U.S.A.）と共同研究をスタートさせた。彼はトラッキング理論の専門家で、今回、本研究との関連で Financial Model に関する論文を完成させた。

３．　研究の方法

当初は比較的簡単な仮定(債券価格への不確定要素と倒産事象に関する確率変動の独立性)の元でモデルの検証を考えていた。所が、その仮定下では現実の確率とリスク中立確率が一致することなるケースが多く見られ、余り現実的ではない。そこで、2 年目より測度変換を、又最終年度ではトラッキング理論からの結果を取り入れる方向を模索してきた。測度変換については Tobe+Takahashi(2013,2014) に詳しいが、近年ファイナンスの世界で用いられている Ross の方法とは異なり古典的な手法を用いている。具体的には測度変換は Radn-Nikodym の公式をリスク中立確率の基での期待値内に適用し、剰余項については大数の強法則等によりコントロールする。具体的には以下の形で行う；

$$
\begin{aligned}
\Pr(\tau > t) &= E^{\Pr}(I_{[\tau>t]}) = \int_{[\tau>t]} d\Pr \\
&= \int_{[\tau>t]} \frac{d\Pr^{(t)}}{dQ^{(t)}} dQ \\
&= E^{Q}\left\{ I_{[\tau>t]} \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{t} \lambda_i x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t} \lambda_i^2 \right\}\right\} \\
&= E^{Q}\left\{ I_{[\tau>t]} \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{t} \lambda_i (x_i - \lambda_i) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t} \lambda_i^2 \right\}\right\} \qquad (8) \\
&= e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\lambda_i^2} E^{Q}\left\{ I_{[\tau>t]} + I_{[\tau>t]}\left[\exp\left\{ -\sum_{i=1}^{t} \lambda_i (x_i - \lambda_i) \right\} - 1 \right]\right\} \\
&= e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\lambda_i^2} Q(\tau > t) + e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\lambda_i^2} E^{Q}\left\{ \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{t} \lambda_i (x_i - \lambda_i) \right\} - 1 \right\} - e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\lambda_i^2} Rem
\end{aligned}
$$

where, $E^{\Pr}$ and E^{Q} are expectations under Pr and Q respectively, and the remainder term is given by,

$$
Rem = E^{Q}\left\{ I_{[\tau\le t]}\left[\exp\left\{ -\sum_{i=1}^{t} \lambda_i (x_i - \lambda_i) \right\} - 1 \right]\right\} \qquad (9)
$$

In order to control the remainder term, the trick here is to replace the event $\{\tau > t\}$ by $\{\tau \le t\}$ the second term inside the expectation sign in the equation (9). This comes from the observation that for the most of the interesting application, the value of t is less than 10(years) and the probability of the event $\{\tau \le t\}$ under Q is substantially small. It follows that we may consider the third term on the right most side of (9) as a remainder. We next use Schwartz inequality,

$$
\begin{aligned}
|Rem| &\le E^{Q}\left\{ I_{[\tau>t]}\left[\left| \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{t} \lambda_i (x_i - \lambda_i) \right\} - 1 \right| \right]\right\} \\
&\le \sqrt{Q(\tau \le t)} \sqrt{E^{Q}\left\{ \exp\left\{ -2\sum_{i=1}^{t} \lambda_i (x_i - \lambda_i) \right\} - 2\exp\left\{ -\sum_{i=1}^{t} \lambda_i (x_i - \lambda_i) \right\} + 1 \right\}} \\
&= \sqrt{Q(\tau \le t)} \sqrt{e^{2\sum_{i=1}^{t}\lambda_i^2} - 2e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\lambda_i^2} + 1}
\end{aligned}
$$

Since

$$
E^{Q}\left\{ \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{t} \lambda_i (x_i - \lambda_i) \right\} - 1 \right\} = \exp\left\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t} \lambda_i^2 \right\} - 1
$$

It follows that,

$$
\Pr(\tau > t) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\lambda_i^2}\left[Q(\tau > t) + \exp\left\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t} \lambda_i^2 \right\} - 1 + \mathrm{Rem} \right]
$$

where,

$$
|Rem| \le \sqrt{Q(\tau \le t)} \sqrt{e^{2\sum_{i=1}^{t}\lambda_i^2} - 2e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t}\lambda_i^2} + 1}.
$$

４．研究成果

主な結果等については３．研究の方法の所で述べてある。論文やプロシーディングストしての結果は５、主な発表論文等の所に書いてある。

確率測度の変換関連では早稲田大学の戸辺助手との共同研究（Estimation of Default Probability）ではRadon-Nykodymの定理と大数の法則の組み合わせにより、1ファクターモデルにおいては一定の結果が導出された。Mori博士らとの共同研究の部分については、未だ本研究との直接的な結論は出ていない。ただ、Multiple Tracking法により倒産事象と市場に於ける確率変動との組み合わせが容易に達成できる。

研究成果として未だ、論文等の形に纏められていないが、2012年にボストン大学のGasiano 教授との議論は有益であった。Implied な世界に於ける倒産確率とは一体何なのか？ Implied ボラティリティについては実確率のそれと同じであるが、倒産確率は異なる。半分哲学的な話になりかねないが、今後深く考えていかなければならない問題である。

５．主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕（計　1　件）

Tobe, R and H. Takahashi "Estimation of Default Probability under Real Probability Measure" 2014, WIF-14-001 Working Paper Series, Institute of Finance Waseda University

〔学会発表〕（計　2　件）

Mori,S., KC Chang, H. Takahashi, and C-Y Chong "Application of Interacting Multiple Model Tracking Method to Financial Modeling and Asset Allocation" (2015), To Appear Proc. 18th International Conf. on Information Fusion, Washington DC.

Takahashi, H. and R. Tobe "Estimation of Default Probability under Real Meadsure" (2013), JAFEE 冬の大会 2013年12月9日

An Application

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件

○取得状況（計０件）

〔その他〕

ホームページ等

６．研究組織

(1)研究代表者

高橋　一（TAKAHASHI,Hajime）

公立鳥取環境大学　学長・教授

研究者番号：70154838