

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 14 日現在

機関番号：32606

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24530224

研究課題名(和文)連続時間モデルによる金融時系列の長期記憶性分析のための統計理論

研究課題名(英文)Statistical theory for the analysis of long-memory financial time series using continuous-time models

研究代表者

田中 勝人(Tanaka, Katsuto)

学習院大学・経済学部・教授

研究者番号：40126595

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：連続時間確率過程であるf0-U過程に含まれるドリフト・パラメータの推定・検定問題を考察した。特に，MLEについて調べ，分布関数や密度関数を数値積分により計算して，分位点を求め，グラフ表示した。MLEの漸近理論(観測区間が無限大になる場合)に関しては，エルゴード的な場合には正規性が証明されていて，Hurstパラメータに依存しない。それに対して，本研究では，非エルゴード的な場合の漸近理論を導出した。MLEはコーシー分布に収束し，分布はHurstパラメータに依存して，1/2の周りで対称となることがわかった。そして，その値が1/2から離れるに従って集中確率が大きくなることを証明した。

研究成果の概要(英文)：We investigated the estimation problem for the drift parameter in the f0-U (fractional Ornstein-Uhlenbeck) process which is a long-memory continuous-time stochastic process. Numerical integration was employed to compute the probability density of the MLE and the density was graphically presented. Asymptotic theory was also developed as the time span goes to infinity. It was proved that the MLE for the non-ergodic case converges to Cauchy distribution. The distribution depends on the Hurst parameter H and is symmetric around H=1/2. It was also proved that the concentration probability increases as H gets away from 1/2. These results were published in international refereed journals.

研究分野：統計学および計量経済学

 キーワード：連続時間確率過程 Hurstパラメータ 最尤推定量 フラクショナル・モデル エルゴード的な場合
 非エルゴード的な場合 特性関数 数値積分

1. 研究開始当初の背景

(1) 非定常な金融時系列を描写する離散時間のモデルにおいては、誤差項に長期記憶性を仮定して、ARFIMA (フラクショナル自己回帰移動平均) モデルを使った分析を行うのが通常である。それに対して、最近、多くの金融時系列において、高頻度のデータが利用できる環境ができています。したがって、離散時間だけでなく、連続時間における理論が必要になってきた。

(2) その際、離散時間の ARFIMA モデルに対応する連続時間モデルとして、フラクショナル・ブラウン運動 (fBm) だけでなく、near unit root の場合も考慮して、誤差項が fBm であるようなフラクショナル Ornstein-Uhlenbeck (fO-U) 過程を考察することが盛んになってきた。

2. 研究の目的

本研究は、離散時間の単位根時系列に関する研究をまとめた自著

Tanaka, K. (1996) *Time Series Analysis*:
John Wiley, New York

および、離散時間の長期記憶時系列にまで範囲を拡張して議論した自著

田中勝人著『現代時系列分析』岩波書店、2006 年の内容をベースにして、現状の世界的な研究状況を踏まえた上で、時系列モデルを離散時間から連続時間へ拡張することにより、新たに生まれる問題を扱い、連続時間特有の長期記憶性を分析するための統計理論を構築することであった。

3. 研究の方法

まず、連続時間モデルとして提案されているいくつかのモデルの統計的性質の検討を行った。特に、長期記憶性を考慮したモデル化どうかの観点を中心に検討した。

(1) 長期記憶性を描写するのにふさわしいモデルとして、fO-U モデルを第一の候補として考えたが、研究プロセスの中で別の候補が

出る可能性も考慮に入れた。その場合は、fO-U モデルと並行的に考察することになるが、現段階では、さしあたり、fO-U モデルを前提にして議論した。

(2) fO-U 過程は、 $B_H(t)$ を fBm とするとき、その確率微分が

$$dY_H(t) = \alpha Y_H(t) dt + dB_H(t) \\ (0 \leq t \leq M)$$

と表される確率過程である。ここで、 α はドリフト・パラメータ、 H は Hurst 指数と呼ばれる定数、 M はデータが観測されるタイム・スパンである。通常の O-U 過程は、 H が $1/2$ の場合であり、その場合の推測理論、特に α が負の場合の推定や検定問題は、ほとんど完全に解決されている。特に、 α の自然な推定量は、 $H=1/2$ の場合には、 α の最小 2 乗推定量 (LSE) であると同時に、最尤推定量 (MLE) でもあり、その分布は完全に解明されている。しかし、 H が $1/2$ よりも大きい場合は、 $B_H(t)$ も $Y_H(t)$ も、セミマルチンゲールではなく、確率積分そのものの定義を再考しなければならなくなる。

(3) 離散時間の単位根時系列や長期記憶時系列の分析については、上記の著書や論文

Tanaka, K. (1999) "The nonstationary fractional unit root," *Econometric Theory* 15, 549-582.

において、推定や検定の問題を議論した。本研究は、これらの議論を連続時間に拡張するものであり、推定量の分布関数や密度関数などを計算し、統計的な性質を解明し、さらに、 α に関する仮説検定を実行したものである。

(4) 本研究では、ドリフト・パラメータの MLE の分布導出に関連した計算方法が最重要課題であった。分布に関連した特性関数は、Kleptsyna and Le Breton 論文の結果から導出可能であるが、その表現は、変形ベッセル関数を含む非常に複雑なものである。この関数を反転して分布関数を計算するには、コンピュータを駆使しても多大な計算量と巧

妙なアルゴリズムを必要とする。この計算は、未だ世界中で誰も行っておらず、成功すれば、多大な貢献となると考えられた。さらに、観測期間 M に関する漸近分布の導出も、複雑な特性関数に基づくものであるが、実行可能なものであると予想して、実際にできれば貴重な成果となるものと判断した。

4. 研究成果

(1) f_0 - U 過程に含まれるドリフト・パラメータの推定問題を考察した。まず、 β が負となるエルゴード的な場合で、Hurst パラメータが $1/2$ より大きい場合の LSE について、その統計的性質を調べた。特殊な場合として、通常の 0 - U 過程における LSE と比較して、相互の違いや共通性などを把握した。また、他の推定量として、MLE や MCE (最小コントラスト推定量) についても調べた。さらに、これらの分布関数や密度関数を数値積分により計算して、分位点を求め、グラフ表示した。これらの結果は、査読付き学術誌である *Statistical Inference for Stochastic Processes* (2013) に掲載された。

(2) Hurst パラメータが $1/2$ より大きい場合の f_0 - U 過程を引き続き考察する中で、タイム・スパン M が大きくなるときの推定量の漸近的な性質 (収束のオーダーや極限分布など) を導出した。また、ドリフト・パラメータに関する仮説検定、特に、帰無仮説が $\beta = 0$ の場合を扱った。この問題は、誤差項が $f_B m$ に従う場合の単位根問題として解釈できる。検定統計量としては、LSE, MLE, MCE などに基づくものを考えて、これらに基づく検定と検出力の関係を調べた。

(3) Hurst パラメータが $1/2$ より小さな場合は、その増分が長期記憶性をもたないので、金融時系列の分析には、特に必要ない。また、取り扱いも複雑である。しかし、数学的には解決しなければならない問題であるので、 $1/2$ より大きい場合との違いを見出しつつ、

推定や検定の問題に取り組んだ結果、MLE は特に問題なく使えることがわかった。特に、 $H=1/2$ を中心にして分布が対称になることが示された。

(4) さらに、パラメータ β が正の非エルゴード的な場合の推測理論についても考察した。この場合の MLE の分布計算は世界的にも初めての結果であり、本研究の重要な成果である。

(5) 非エルゴード的な場合の MLE の分布について、詳細な研究を行った。特に、MLE については、Hurst パラメータが 0 と 1 の間で適用可能であり、この点ではエルゴード的な場合の MLE と同様であることがわかった。さらに、観測期間 M が無限大になるときの MLE の漸近的な性質についても解明した。その分布は、適当に標準化した場合にコーシー分布に収束することを証明した。そして、その分布は Hurst パラメータ H が $1/2$ から離れるに従って集中的となり、 $H=1/2$ に関して対称であることを証明した。これらの結果は *Statistical Inference for Stochastic Processes* (2015) に掲載された。

(6) 今後の研究課題としては、連続時間で得られた成果を離散時間の中で考察することが挙げられる。その場合に、連続時間と同様の漸近理論が成り立つことが予想されるが、厳密にはそのことを証明する必要がある。別の課題としては、Hurst パラメータ H が未知の場合の推測理論を構築することである。 H が既知の場合に得られた結果が、未知の場合にどのような変更がなされるかを考察することは、実際問題においても重要であり、また、理論的な観点からも興味がある。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

Tanaka, K. (2015). ``Maximum

likelihood estimation for the non-ergodic fractional Ornstein-Uhlenbeck process,' ' Statistical Inference for Stochastic Processes, Vol. 18, pp. 315-332.
DOI 10.1007/s11203-014-9110-9

Tanaka, K. (2014a). ``Distributions of quadratic functionals of the fractional Brownian motion based on a martingale approximation,' ' Econometric Theory, Vol. 30, pp. 1078-1109.

DOI: 10.1017/S0266466614000048

Tanaka, K. (2014a). ``Linear nonstationary models - A review of the work of Professor P.C.B. Phillips,' ' Econometric Theory, Vol.30, pp. 815-838.

DOI: 10.1017/S0266466613000480

Tanaka, K. (2013). ``Distributions of the maximum likelihood and minimum contrast estimators associated with the fractional Ornstein-Uhlenbeck process,' ' Statistical Inference for Stochastic Processes, Vol. 16, pp. 173-192.

DOI:10.1007/s11203-013-9085-y

〔学会発表〕(計9件)

Tanaka, K. ``Distributions of quadratic functionals of the fractional Brownian motion based on a martingale approximation,' ' 確率論セミナー、カンザス大学、2012年8月

Tanaka, K. ``Distributions of the maximum likelihood and minimum contrast estimators associated with the fractional 0-U process,' ' 韓国との二国間共同セミナー、ソウル、2012年11月

Tanaka, K. ``Statistical inference associated with the fractional Brownian motion and related processes,' ' オーストラリア国立大学リサーチ・セミナー、2013年3月

Tanaka, K. ``Distributions of quadratic functionals of the fractional Brownian motion based on a martingale approximation,' ' 確率論セミナー、ヘルシンキ大学、2013年8月

Tanaka, K. ``The non-ergodic fractional 0-U process and the maximum likelihood estimation,' ' オーストラリア国立大学リサーチ・セミナー、2014年3月

Tanaka, K. ``Maximum likelihood estimation for the non-ergodic fractional 0-U process,' ' 確率論セミナー、メヌ大学(フランス、ル・マン)、2014年9月

Tanaka, K. ``Statistical analysis of long-memory processes associated with the fractional Brownian motion,' ' オーストラリア国立大学リサーチ・セミナー、2015年3月

Tanaka, K. ``Limiting local powers of panel unit root tests,' ' SETA meeting、ワイカト大学(ニュージーランド、ハミルトン)、2016年2月

Tanaka, K. ``Limiting local powers of panel unit root tests,' ' オーストラリア国立大学リサーチ・セミナー、2016年2月

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田中 勝人 (TANAKA, Katsuto)

学習院大学・経済学部・教授

研究者番号: 40126595