

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 10 日現在

機関番号：12701

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24530227

研究課題名(和文) コピュラを用いた生存時間データと順序データの分析手法の開発

研究課題名(英文) New copula models for survival and ordered data

研究代表者

小林 正人 (Kobayashi, Masahito)

横浜国立大学・国際社会科学研究院・教授

研究者番号：60170354

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：従来のparametricなcopulaは非対称性と裾依存性の値域に制約がある。本研究では、従来のcopulaと比較して、非対称性と裾依存性の柔軟性が大きなcopulaを開発し、単一のcopulaだけで、すべての状況を表現することを可能とし、非対称性と裾依存性の変化を考慮した生存分析、格付け、VaRやExpected Shortfallなどの計算を可能とした。

研究成果の概要(英文)：We propose a new parametric copula that has more variability of asymmetry and tail dependence than conventional copulas. Then we can analyze survival analysis, credit ratings, Value at Risks, and Expected shortfall by a single family of copula, without being bothered with the choice of appropriate copulas.

研究分野：計量経済学

キーワード：copula 柔軟性 Value at Risk Expected Shortfall

1. 研究開始当初の背景

Copula は周辺分布に一様分布を持つ多変量密度関数である。これを用いれば、多変量確率分布を周辺分布と相関構造を独立してモデリングすることが可能であるため、様々な分野で強力なツールとして利用されている。すなわち確率変数 X, Y とその同時密度関数 $f(x, y)$ 、周辺分布関数 $F_X(x), F_Y(y)$ にたいして、コピュラは

$$C(u, v) = f(F_X^{-1}(u), F_Y^{-1}(v))$$

と表される。これにより、任意の周辺分布関数 $F_X(x), F_Y(y)$ を持つ同時密度関数 $f(x, y)$ が

$$f(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y))$$

と一意的にあらわされるのである。

主要な応用分野としては生存分析や金融資産価格の分布など、多変量正規分布では十分な近似ができないことがよく知られている分野である。特に、金融分野では

- 1) 正規分布よりも裾が厚い(fat tailed)
- 2) 分布の上端と下端では分布が異なる (asymmetry)
- 3) 相関構造が正規分布と異なるなどの現象が様々な問題で観察されているためである。この問題については Patton, A. J.: (2004), 'On the out-of-sample importance of skewness and asymmetric dependence for asset allocation', *Journal of Financial Econometrics* 2(1), 130-168. が詳しい。

正規コピュラ以外では、ポートフォリオなど和の分布の導出は困難であることから、経済ではファイナンス以外には広がりを見せておらず、そのファイナンスでも実務では正規コピュラと非正規の周辺分布という組み合わせたモデルが多く用いられており、非対称性や高い裾依存性などのコピュラ本来の特徴を十分に生かし切れていない。

生存分析においても、事象の生起時間相互の構造については、互いに独立であるか最小限の相関構造という想定を行うことが多く、十分な分析がなされているとはいえない。

2. 研究の目的

本研究の目的はコピュラを経済分析への応用を広げることにある。そのため次の二つの分野で研究を行った。

- 1) 生存分析および離散変数への応用
この分野においては competing risks model への応用を行う。competing risks model とは、二つの現象のどちらか一方の早く生起するほうだけが観察される状況での生存分析のモデルであり、労働経済学や企業の消滅などのメカニズムを表現するのにもちいられる。その代表的な研究が Han and Hausman (1990) 'Flexible parametric estimation of duration and competing risk model', *Journal of Applied Econometrics*, vol.5, pp.1-28, である

この領域における本研究の目的は、通

常の一変数の生存分析と多変数の生存分析とのモデル選択の方法がないという不便の解消である。工学や生物学などでは故障や死亡の原因が competing risks model であるか、一変数の生存分析モデルであるかはほとんど自明であるが、経済学などでは、そのメカニズムは自明でなく、どちらのモデルを選択するべきかを判断する基準の必要性は大きい。Han and Hausman(1990) においては、失業者が新しい企業に雇用されることと以前の企業に雇用されることのうち、先に発生したほうが観察されると仮定しているが、この二つの期間はきわめて強い相関を持つため、実質的には単一の確率変数と考えることは十分可能であり、そのどちらが正しいかは先験的ではなく、実証的な検証により決められるべき問題である。

2) 金融分析への応用

周辺分布の裾の厚さ、分布の非対称性、危機における相関の増大など、金融資産の収益の同時分布の特異性については、ほぼ定型化された事実とされ、それを適正に分析できるモデルはすでに数多く表現されている。この問題については T.Okimoto (2008), New Evidence of symmetric Dependence Structures in International Equity Markets, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Volume 43, pp 787-815. が詳しい。とくに周辺分布の裾の厚さについては、GARCH モデルなどの動的なモデリングが大きく発達している。しかし、平常時、バブル時、危機時においては別箇のモデルを必要とし、すべてを包含するモデルの必要性は大きい。特に予測においては動的なモデルの構築を必要とするため、モデルの間の連続的な変化が表現できるモデルであることが望ましい。

3. 研究の方法

第一の competing risks model においては、Gumbel コピュラ

$$C(u, v) = \exp(-((- \log u)^\theta + (- \log v)^\theta)^{1/\theta})$$

は、相関が 1 に近づく極限において、退化することが容易に示される。このとき二つの現象は実質的に単一のものとなり、competing risks モデルは通常の一変数の生存分析モデルに帰着されることに着目した。すなわち、一変数の生存分析モデルは competing risks に包含されるのである。Gumbel コピュラのこのような性質を用いた研究は見当あたらず、本研究の独自の視点である。

複数のモデルが関係にある場合は仮説検定が可能であるが、この問題においては Wald 検定、尤度比検定など対立仮説での推定を必要とする統計量は分布が非対称性となることが判明する。これは相関係数や分散など、帰無仮説での係数値に上限や下限がある場

合、帰無仮説における推定量の分布の分布は対称とはなりえず、当然、その漸近分布は正規分布とはなりえない。したがって、尤度比検定や Wald 検定の統計量の漸近分布は伝統的なカイ二乗分布とはなりえない。このため帰無仮説におけるモデルの推定量を用いるラグランジュ検定を行う。この検定の統計量の導出には、すべてのパラメータについて対数尤度の導関数を求める必要があるため、計算がきわめて煩雑であるという難点があるが、この状況では唯一の検定統計量の導出手段である。

第二の金融資産の収益率の分布に対する分析である。通常、裾依存性は極限での値をもって定義されており、確率変数 X, Y とその分布関数 $F_Y(x), F_X(y)$ にたいして、

$$\lim_{u \rightarrow 0} P(Y < F_Y^{-1}(u) | X < F_X^{-1}(u))$$
あらわされる。正規コピュラでは裾依存性が 0 になるということから、分布の下端での相関の変化を表現するには不向きであると信じられている。しかし、実際のデータでは下側 1%点、5%点における分布が実務的には考慮されているため、正規分布でも強い相関を持つことにより下側裾依存性は十分つよくなり、相関の変化を十分に表現することが可能である。むしろ、正規コピュラの問題点はその対称性であり、中央部分や分布の上側の分布も同時に推定せざるを得ず、全域で共通した相関構造を持つという想定から、下側裾依存性が正しく Value at Risk にせよ Expected Shortfall にせよ、分布の下端だけの特性であるという点が重要である。本研究ではその点に注目し、下端だけの分布を独立して推定できる手法を開発した。これにより正規コピュラの持つ欠点である、下端、上端、中央で同一の相関構造を持つという欠点を除去することが可能になった。

4. 研究成果

第一のテーマである生存データと離散データへの利用については、Gumbel コピュラの相関が 1 であるという仮説に対する検定統計量を導出した。その形は対数尤度の導関数の複雑な関数であるため、ここでは省略する。モンテカルロ実験を行ったところ、理論からよそうされるカイ二乗分布に十分近似できる経験分布を得た。

第二のテーマである、複数の国際株式市場の収益率データに対してこの方法を利用し、正規コピュラ、ガンベルコピュラによる裾依存性の推定とどちらが実測した裾依存性に近いかを比較した。平常時には正規コピュラはほぼ偏りのない裾依存性を与えるのに対し、ガンベルコピュラは裾依存性を過大推定する。一方、危機時にはガンベルコピュラは裾依存性をほぼ偏りなく推定するが、正規コピュラは裾依存性を過小推定する。このため、われわれの提案するフレキシブルな copula を最尤推定し、データに当てはめたところ、平常時、危機時の双方において、良好な当て

はまりを見せ、十分な実用性があることが判明した。

Value at Risk や裾依存性の推定だけであるならば、ノンパラメトリックな推定で十分であるが、

- 1) 動学的な形での将来予測
- 2) 最適なポートフォリオの選択
- 3) Expected shortfall (ES)

を考えるにあたり、何らかの分布形を考える必要があり、とくに最後の ES は、主要国金融監督当局が構成するパーゼル銀行監督委員会が 2010 年に発表した自己資本規制であるパーゼル III において VaR にかわって金融業でのリスク尺度として標準的なものとされている Expected Shortfall

$$E(X | X < F_X^{-1}(u)), 0 < u < 1$$

は、parametric な方法でなければ高い精度で推定することは困難であり、これをポートフォリオの形で考えることのできる我々の方法がきわめて有望である。

また、サンプルサイズが限られている状況で下側 1%を推定することは極めて困難であるため、VaR や裾依存性をノンパラメトリックアプローチで推定することは困難であり、何らかの分布系を想定することが必要である。

静的な状況での推定による相互比較で良好なパフォーマンスを示した。このモデルは容易に時変パラメータを持つモデルに拡張可能であり、状態空間モデルとして粒子フィルターなどの最尤法などの方法により推定することができるため、予測モデルとして活用することは可能であり、きわめて有望である。粒子フィルターとは、モンテカルロ法による状態空間モデルの推定法の一つで、過去の観測値 y_{t-1}, y_{t-2}, \dots が与えられた時の状態変数 θ_t の分布 $f(\theta_t | \theta_{t-1}, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots)$ を乱数によって近似し、新しい観測値 y_t が得られた時、 θ_t 乱数を $f(\theta_t | \theta_{t-1}, y_t, y_{t-1}, \dots)$ に比例する確率でリサンプルするという作業を行い、状態変数 θ_t の分布を乱数によって近似するというものである。世界の金融市場の様々な状況に対応できる柔軟な copula をパラメトリックな形であらわすことなくしてはこのような推定は不可能なのである。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 0 件)

[学会発表](計 1 件)

Cao Chao, Masahito Kobayashi, (2012) Testing for the Single Risk against Dependent Competing Risk Duration Model under the Proportional Hazard Model Assumption, 2012 年度 統計関連学会 連合大会

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小林 正人 (Kobayashi Masahito)

横浜国立大学・国際社会科学研究院・教授

研究者番号：60170354

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：