

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 9 日現在

機関番号：11501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24531098

研究課題名(和文) 小学校算数科・中学校数学科における乗法概念領域の教授・学習に関する臨床的研究

研究課題名(英文) Clinical study on teaching and learning in multiplicative conceptual field in elementary school arithmetic and junior high school mathematics

研究代表者

市川 啓 (ICHIKAWA, Hiraku)

山形大学・教育文化学部・准教授

研究者番号：20624745

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：「比例を仮定して、かけたりわったりすること」が子どもの中でどのように認められていくのかについて明らかにすることを試みた。その結果、「整数の範囲の倍比例と等分比例がどう機能しながら小数倍の倍比例が認められるようになるか」に関する1つのプロセスを見出した。また、整数の範囲の等分比例が簡単には認められない実態があることを特定し、「均質性」への着目が重要であることを考察した。それに伴って、均質性に着目してさらに分析・考察をすすめるためのより精緻な枠組みが必要であるという課題も見出された。

研究成果の概要(英文)：We attempted to clarify how “assuming proportion and multiplying and dividing” starts to be recognized in the child. As a result, we found one process regarding “how the multiplicative proportion of the decimal proportion is recognized with the way multiplicative proportion and divided equal proportion functions”. Furthermore, by specifying that there is a reality of the divided equal proportion in the range of integers being not recognized, we considered that focusing on “homogeneity” is important. Along with that, the subject with a minute framework for further analysis and examination for focusing on the homogeneity.

研究分野：数学教育

キーワード：乗法概念領域 比例的推論

1. 研究開始当初の背景

平成5年に文部省が行った教育課程実施状況調査では、小数・分数の乗除の立式を問う問題が出題された。 \times 小数、 \div 小数、 \times 分数の立式を問う問題の通過率が軒並み64%~66%だったのに対し、 \div 分数の立式を問う問題の通過率は27.2%と著しく低いことが明らかとなった。このことは、表記は異なるが同じ有理数である小数と分数の除法が、相互に関連付いていない実態があることを示している。また、分数でわる除法は、計算の仕方として除数の逆数をかける乗法に帰着することを指導しているにもかかわらず、上記のような通過率の差ができるのは、 \div 分数と \times 分数の関連づけが上手くできていない実態を示している。通過率だけで見れば、除数が分数になったらできなくなるとも見えるが、これらを乗法概念領域としてとらえれば、それ以前の段階やそれに関係する概念発達が十分でなかったり、それらが関連づけられていなかったりすることにより先のような問題が起こっていると予想できる。

2. 研究の目的

本研究の目的は、乗除法や小数、分数、比、割合、割合などを含む概念間の有機的なつながりをとらえた枠組みである乗法概念領域(Vergnaud,G(1997))における、子どもの概念や推論の進展の様相をとらえるための枠組みを構築・精緻化し、進展のプロセスを明らかにすることである。そして、そのことから概念や推論の進展を促進する教授・学習についての示唆や評価についての示唆を見いだすことである。

3. 研究の方法

- (1) 乗法概念領域に係る国内の教育史について、資料を収集し検討する。また、海外の乗法概念領域に関する先行研究について資料を収集し検討する。
- (2) 小学校4年生・5年生・6年生・中学校1年生を対象に、乗法概念領域における概念や推論の進展を意図した教授実験を行う。
- (3) (2)の教授実験における子どもの反応を、乗法概念領域における概念や推論の進展の点から分析・考察するための枠組みの構築・精緻化を行う。それと並行して、その枠組みから子どもの概念や推論の進展の様相を分析・考察する。

4. 研究成果

本稿では、2つの事例研究を取り上げ、本研究の成果を述べる。

(1) 事例研究1

本事例研究は、小学校第5学年を対象とした同種の量の割合の導入で同じ割合をつく

る際、小数倍の倍比例や整数の範囲の等分比例がどのように見出され認められていくかを明らかにすることを試みたものである。

以下(1)からは、高橋、田端、市川(2014)を抜粋した上、一部加筆修正したものである。

先行研究の概観

割合の導入場面や割合の素地指導として、前提となる比例関係を顕在化させる試みは、これまでも行われてきている。土屋(2002)、早川(2003)、田端(2003)はそれぞれ5年生を対象にし、青山(2012)は、同一学級の子どもを対象にして3年生と4年生、2学年間にわたる実践を行っている。田端、早川、土屋、青山の4つの実践に共通して見出された変化のきまりとしての比例関係は、整数の範囲の倍比例である。見方を変えれば、小数倍まで拡張された倍比例までは、どの研究でも子ども達から見出されてはいない。倍比例以外に、土屋の実践では、子どもから \div の関係と呼ばれている整数の範囲の等分比例が帰納されていた。また、青山の実践では、同じ割合を作るために等分比例を子どもが用いていた。土屋の実践では、等分比例に関して、なぜその関係が成り立つかについてまでは言及されていなかった。青山の実践では、等分比例を認める根拠を数直線に求めていたことが読み取れたが、どのようにして認めていったかについての詳しい言及はなかった。

本事例研究の目的

本事例研究の目的は、子どもが割合を、見出した割合の理解にどのようにつなげるかを明確にすることである。特に整数倍の倍比例と整数の範囲の等分比例がどのように関わり、小数倍の倍比例につながるかに焦点を当てる。

実験授業の構想

事例研究の目的を踏まえ、次のような問題を設定する。場面としては、ある人のバスケットボールフリースローの調子よしあしを問題とする。このとき、「10回投げて8回入った2日目と、15回投げる4日目と同じ調子とすれば、4日目は何回入るか」を中心問題とする。

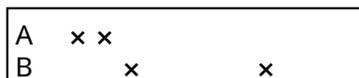
これにより、投げた数が1.5倍になったとき入った数がどうなるかについて焦点が当たり、小数倍の倍比例が顕在化する。また、子どもが「10回中8回入る」と同じ調子として「5回中4回入る」を考えると、等分比例が顕在化し、「5回中4回入る」ことをもとに「15回中12回入る」を構成するとき、整数倍の倍比例が顕在化する。

問題提示は、成功を○、失敗を×として、×表で提示する。こうすることにより、子どもが等分比例をどう見出し、どう認めるかが顕在化するようになる。整数倍の

倍比例を考えているうちは、成功(○)と失敗(×)の分布は問題にならない。例えば、10回投げて8回入るAさんとBさんが、同じ調子でまた10回投げたことを考えると、素朴に考えれば、次の10回も最初の10回と同じ分布で8入るとすることが自然である。さらに言えば、次の10回の分布が最初の10回の分布と全く異なっていたとしても、投げた回数と入った回数が同じであれば結論は変わらないのである。

小数倍のときは、どうであろうか。小数倍の比例を考えるとき、与えられたデータそのままの同じ事象の繰り返しとしてとらえることはできなくなる。例えば、1.5倍では、0.5倍を考える必が出てくる。すると、等分比例を考える必要が出てくる。

さらに、整数の等分比例を実際に即して考えようとすると、と×の分布が問題となる。10回中8回入る調子をもとに投げた数が半分になったとき、同じ調子なら、入った数はどれだけかを考えた場合、最初の10回が図1のAのような分布をしていた場合とBのような分布をしていた場合では、子ども達の反応が異なることが予想される。なぜなら、「半分にする」と「前の5回と後半5回のシュートにわけること」としてとらえたとすればAのように前半と後半では調子が異なってくる場合もあるからである。



【図1】

×表を提示することにより、「投げる数が分になったとき、入った数も半分になると考えると、つまりどういうことを仮定しているのかについても、子ども達の思考の様相が顕在化することが期待できる。

子どもの様相と進展に関する考察

A) 小数倍まで拡張した比例関係に対する子どもの認識

投げる数と成功した数の間の変化の規則が小数倍になると、比例関係を認められない子どもがいることが明らかになった。また一見小数倍の比例関係が成り立つことを認めているような反応を示す子どもの中にも、整数倍に限って認めている整数を形式的に小数に変えているだけの可能性があることが明らかとなった。

整数倍の比例関係を認めている児童であっても、そう簡単に小数倍までの比例関係を認めることができるわけではないことが確かめられた。

B) 小数倍まで拡張した比例関係を認める手がかり

(成功した数-投げた数)という数対で表したとき、(8-10)の公約量である(4-5)の数対を等分比例により作り、それをもとに倍比例による推論で求めた数対(12-15)と、小数倍で求めた数対(12-15)が一致するこ

とを確かめる過程を踏むことにより、小数倍まで拡張した比例関係を認めることができた。

帰一法と呼ばれる(0.8-1)という数対をつくり、それをもとに倍比例による推論で(12-15)という数対を求める方法が(0.8-1)という実際には起こりえない数対を媒介することに対し、先の方法は、(4-5)という実際に起こりうる数対を媒介にした点でも、子どもに受け入れやすかったのではないかと考える。

ここでの学習活動は、小数(1.5)倍の比例関係を認められなかった子どもばかりではなく、形式的に比例関係を考えていた子どもにもその妥当性を与えるという意味で、意味ある学習が成立したといえる。

C) 整数の範囲の等分比例をどう認めるか

(8-10)の公約量の数対を作ろうとした際、10回投げて8回入った事象と、5回投げて4回入る事象とを「同じ調子」と、すぐには認めることができなかった子どもがいた。子ども達は、調子のデータとして×表も参照しており、5回と5回に分割された×表をみて、分割された前半の5回中4回と、後半の5回中4回と、もともとの10回中8回が同じ調子であることを直には認めることができない実態があった。教師が、意図的にと×の位置を交換したことで、全く同じ事象の繰り返しと見られたときにはじめて等分比例を認め、これによって分割された事象とはじめの事象が「同じ調子」を表していることが理解できることが明らかとなった。

(2) 事例研究2

中学校1年の比例式の教授・学習に焦点をあてる。比が等しいこと、またそれを表す式は小学校でも扱われている。何をどのように進展させることができるのか、小中の接続の視点から検討した。

以下(2)からは、小野、田端、市川高橋(2014)を抜粋した上、一部加筆修正したものである。

本事例研究の目的

本事例研究の目的は、算数と数学を接続する視点から比と比例式ならびに比例の学習指導を再考することにある。

「比例する」と「比例をなす」

佐藤良一郎(1929)は数学教育各論の中で、次のように述べている。

「二つの比 $a : b$ と $c : d$ が等しいときには、 a, b, c, d は比例をなすといひ、 $a : b = c : d$ なる等式を比例式という。」

しかしここでの「比例をなす」とは関数の比例とは異なる。加藤国雄(1957)は、「『比例をなす』は、比例式を作るという意味であって、『比例する』とは区別しなければならない。」(p.65)と述べている。佐藤もまた、同書の中で、「尚ほ、しかし、さういふ形式

の意義を明確に理解させる外に、四つの量(但し最初の二つは同種、他の二つは同種なるを要する)が比例をなすということの観念が実際に如何に必要であるかを具体的の例に依て示さねばならぬ。と同時に、正比例する(或は比例する)という観念との差異及び関係を明確にすることを忘れてはならぬ。」と述べている。このことは、比例式が成り立つ(比例をなす)場合でも比例関係にない場合があることを差している。前田隆一(1960)が「要するに、比例式は関数関係としての比例関係を予想しなくても、とにかく、二つの比が等しくさえあればなりたつが、関数関係としての比例関係は、二つの変量の、対応するどんな二組の値に対しても比例関係がなりたつことである。」と述べているのはこのことである。

以上を踏まえて、算数と数学を接続する視点からこれらの内容を再考してみたい。現在の教育課程で比ならびに比例式の学習は、小学校第6学年である。ところがそれを踏まえた比例の学習は、田端(2012)が指摘しているように、小学校でも中学校でも比例式と関連づけられていない。

この原因は、大きく分けると2つある。1つが小学校算数において比は同種に限るとして異種の比を認めていないからであり、もう1つが前田が述べているように、比例式が成り立つからといって関数としての比例関係が成り立つとは限らないからである。

一方で比例関係にある2つの数量関係では、(同種、異種を問わず)比は等しく比例式が成り立つ。

実験授業の構想

次の2点を満たす比例式の授業を行う。

* 比例する異種の2量について、異なる測度空間における対応する2量の比(これを外比と呼ぶ)が等しいとする比例式について指導する。

* 比例する2つの数量関係では、(同種、異種を問わず)比例式が成り立つことを指導する。

その上で、おうぎ形の面積や弧の長さとその中心角に係る学習の場面で、比例式をどのように用いて問題解決することができるかを評価の場面として用い、生徒の思考の様相を分析、考察することを通して所期の目的の達成を目指す。

接続をとらえる視点

小学校算数と中学校数学の比と比例式ならびに比例の学習の接続を考える上で、次の点に着目する。

A) 比例の定義の違い

小学校の比例の定義は、「伴って変わる2つの量 x 、 y があり、一方の数量 x が2倍、3倍、...となるとき、それに伴ってもう一方の数量 y が2倍、3倍、...となるとき、 y は x に比例する」である。中学校の比例の定義

は、「 y が x の関数で次のような式で表されるとき、 y は x に比例するという。 $y = ax$ 」である。

B) 着目する比

A)のように小学校で比例を定義した際には、 x と y の変化の規則に着目したのに対して、中学校で比例を定義した際には、 x と y の対応の規則に着目している。

言い換えれば、小学校の比例の定義は、同一測度空間内の比(これを内比と呼ぶ)への着目であり、中学校の比例の定義は、異なる測度空間間の比つまり外比への着目である。

C) 外比の比の値の意味の解釈

比例する2量 x 、 y が同種の量の場合、外比の比の値は「同種の量の割合」を意味する。 x 、 y が異種の量の場合、外比の比の値の解釈は学習段階等により次のいくつかが考えられる。

例えば、比例する2量 x 、 y がそれぞれ、時間と道のりを表していたとする。そのときの対応する要素 x_1 、 y_1 (x_1 、 x 、 y_1 、 y)の外比の比の値 y_1/x_1 は、どんな意味と解釈できるだろうか。一つには、単位量当たりの大きさと見れば、 x の量の値が1のときの y の量の値である。もう一つは、「異種の量の割合」として定義された内包量の「速さ」を表しているとも見られる。さらには、量的な世界を離れ、比例における「比例定数」と見ることでもできよう。このときの「比例定数」は、 y と x を関連づける関数作用素である。

本研究では、小学校算数と中学校数学の接続の視点から比例を捉えた場合、外比の比の値 y/x の意味が、単位量あたりの大きさから関数作用素として抽象化されていく過程が重要と考える。

生徒の様相と進展に関する考察

実験授業に基づいて考察をした結果、次の3点が明らかとなった。

A) 異種の比が等しいとする比例式のよさを生徒が感じ取っていること。

B) 小学校の比例の定義に基づいて2量の比例関係を捉え、比例しているから異種の外比が等しいことを認めることにより、生徒の比例の認識が進展すること。

C) 同種だけでなく、異種の外比にも着目することで、同種の内比に着目しては得ることができない普遍的な関係に着目する契機が生まれ、「比例をなす」から「正比例する」への移行の手がかりになること。

なお、異種の外比の比の値が関数作用素へと変わっていくプロセスを実証的に検討することは、今後の課題とする。

引用文献

青山尚司(2013)。「割合の見方・考え方を育てる指導の工夫 - 数直線図上で対応する数量を操作する活動を通して - 」。日本数学教育学会会誌・第95巻第10号・pp.2-10。

早川健(2003)。「『同じ割合』に焦点を当てた割合指導の導入」。日本数学教育学会会誌。第 85 巻第 12 号。pp.23-30。
 加藤国雄(1957)。第 5 章比と比例。鍋島信太郎 他監修。関数と統計。金子書房。pp.57-73。
 前田隆一(1960)。第 編割合第 1 章指導内容の解説。赤羽千鶴他監修。新算数教育講座第三巻 数量関係。吉野書房。pp.239-267。
 小野雄祐、田端輝彦、市川啓、高橋丈夫(2014)。「比と比例式の学習指導に関する一考察」。日本数学教育学会誌。第 96 巻 数学教育論究臨時増刊。pp.41-48。
 佐藤良一郎(1929)。数学教育各論。東洋図書。pp.285-310。
 田端輝彦(2003)。「同種の量の割合の導入に関する一考察」。日本数学教育学会会誌。第 85 巻第 12 号。pp.3-13。
 田端輝彦(2012)。「比例式の指導に関する一考察 - 小学校算数と中学校数学を接続する視点から見て -」。第 45 回数学教育論文発表会論文集。日本数学教育学会。pp.641-646。
 高橋丈夫、田端輝彦、市川啓(2014)。「割合の導入時における比例関係の顕在化に関する一考察 - 同じ割合の数対をつくることを通して -」。日本数学教育学会誌。第 96 巻第 4 号。pp.4-15。
 土屋利美(2002)。「比例の見方を用いた『割合』の指導実践」。日本数学教育学会会誌。第 84 巻第 8 号。pp.30-37。
 Vergnaud,G.(1997).The nature of mathematical concepts.In T. Nunes & P.Bryant(Eds.),Learning and teaching mathematics: An international perspective(pp.5-28).East Sussex, UK: Psychology press.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 12 件)

小野雄祐、田端輝彦、市川啓、高橋丈夫、比と比例式の学習指導に関する一考察、日本数学教育学会誌 数学教育論究、査読有、臨時増刊第 96 巻、2014、pp.41-48
 高橋丈夫、田端輝彦、市川啓、割合の導入時における比例関係の顕在化に関する比例関係の顕在化に関する一考察 - 同じ割合の数対をつくることを通して -、日本数学教育学会誌 算数教育、査読有、第 96 巻第 4 号、2014、pp.4-15
 成澤結香里、市川啓、等分除の意味の拡張 - 『おもひでぼろぼろ』の教材化 -、日本数学教育学会誌、査読無、第 96 回大会特集号、2014、p.49
 市川啓、学び合いを支える教材研究 -

包含除の拡張場面における小数倍の学習の教材研究 -、新しい算数研究、査読無、No522、東洋館出版社、2014、pp.12-15
 田端輝彦、割合(倍)の見方で数量関係を把握した結果を分数で表現する、算数授業論究、査読無、vol.92、東洋館出版社、2014、pp.48-51
 成澤結香里、市川啓、倍概念の進展を促す学習指導 - 第 4 学年において、小数で割合を表すことの学習指導に焦点を当てて -、日本数学教育学会誌、査読無、第 95 回大会特集号、2013、p.88
 市川啓、成澤結香里、均質性の意識化を意図した授業に関する考察、東北数学教育学会年報、査読無、第 44 号、2013、pp.58-73
 田端輝彦、除法の意味理解を図るための図とその指導の重点について、算数授業論究、査読無、vol.89、東洋館出版社、2013、pp.24-27
 田端輝彦、同種の量の割合の指導改善 - 単位量当たりの大きさと割合の考えの違いを明確にして -、初等教育資料、査読無、No902、東洋館出版社、2013、pp.49-51
 市川啓、比例的推論の進展に関する考察：第 6 学年における除法を乗法で表す学習指導に焦点をあてて、日本数学教育学会第 45 回論文発表会論文集、査読有、第 1 巻、2012、pp.485-490
 田端輝彦、比(倍)のつまづきに関する一考察 - 全国学力・学習状況調査の結果からみて -、日本数学教育学会第 45 回論文発表会論文集、査読有、第 1 巻、2012、pp.45-50
 田端輝彦、比例式の指導に関する一考察 - 小学校算数と中学校数学を接続する視点からみて -、日本数学教育学会第 45 回論文発表会論文集、査読有、第 2 巻、2012、pp.641-646

〔学会発表〕(計 10 件)

小野雄祐(代表)、市川啓、比と比例式の学習指導に関する一考察、日本数学教育学会秋期研究大会、2014 年 11 月 8 日、熊本大学(熊本県熊本市)
 成澤結香里(代表)、市川啓、等分除の意味の拡張 - 『おもひでぼろぼろ』の教材化 -、日本数学教育学会第 96 回全国算数・数学教育研究大会、2014 年 8 月 1 日、米子松蔭高等学校(鳥取県鳥取市)
 市川啓(代表)、成澤結香里、等分除の拡張の試み：ジブリ映画「おもひでぼろぼろ」の教材化、第 45 回東北数学教育学会年会、2013 年 11 月 30 日、東北女子大学(青森県弘前市)
 成澤結香里(代表)、市川啓、倍概念の進展を促す学習指導 - 第 4 学年において、小数で割合を表すことの学習指導に焦点を当てて -、日本数学教育学会第 95 回全国算数・数学教育研究大会、2013 年 8 月

4日、山梨大学教育人間科学部附属小学校（山梨県甲府市）

市川啓（代表）、成澤結香里、小学校卒業期における中学校との接続を意図した算数的活動～比例関係を強調した速さの実践を通して～、東北数学教育学会第18回初夏研究会、2013年5月25日、宮城教育大学（宮城県仙台市）

市川啓（代表）、成澤結香里「均質性の仮定」に関する考察、東北数学教育学会第44回年会、2012年12月1日、秋田大学（秋田県秋田市）

市川啓、比例的推論の進展に関する考察：第6学年における除法を乗法で表す学習指導に焦点をあてて、日本数学教育学会第45回数学教育論文発表会、2012年11月10日、奈良教育大学（奈良県奈良市）

田端輝彦、比（倍）の三用法のつまずきに関する一考察 - 全国学力・学習状況調査の結果からみて -、日本数学教育学会第45回数学教育論文発表会、2012年11月10日、奈良教育大学（奈良県、奈良市）

田端輝彦、比例式の指導に関する一考察 - 小学校算数と中学校数学を接続する視点からみて -、日本数学教育学会第45回数学教育論文発表会、2012年11月10日、奈良教育大学（奈良県、奈良市）

市川啓、中学校1年生における比例的推論の進展を意図した学習指導、東北数学教育学会第17回初夏研究会、2012年5月16日、飯坂温泉あづま荘（福島県福島市）

6. 研究組織

(1) 研究代表者

市川 啓 (ICHIKAWA, Hiraku)
山形大学・地域教育文化学部・准教授
研究者番号：20624745

(2) 研究分担者

田端 輝彦 (TABATA, Teruhiko)
宮城教育大学・教育学部・教授
研究者番号：80344745

(3) 連携研究者

中村 光一 (NAKAMURA, Kouichi)
東京学芸大学・教育学部・教授
研究者番号：80225218

(4) 研究協力者

高橋 丈夫 (TAKAHASHI, Takeo)
小野 雄祐 (ONO, Yusuke)
成澤 結香里 (NARISAWA, Yukari)