様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 27 年　 5 月 19 日現在

機関番号：10101
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：24540003

研究課題名（和文）自己同型群による不変部分頂点代数の表現の研究

研究課題名（英文）Study of representation theory of fixed point vertex subalgebras

研究代表者
田邊　顕一朗（tanabe, kenichiro）

北海道大学・理学（系）研究科（研究院）・准教授

研究者番号：10334038

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　4,000,000円

研究成果の概要（和文）：(1) 頂点代数Vに対して，V加群の自然な拡張として対数項付きV加群を定義した．さらに対応するヅー代数を構成した．つまり，既約な対数項付きV加群達と，ヅー代数の既約左加群達との間に一対一対応があることを示した．これはヅーの結果の自然な拡張になっている．

(2) 格子頂点代数に対して対数項付き加群の具体例を与えた．格子頂点代数は多くの興味深い部分頂点代数を持つため，この例から多くの対数項付き加群の例を構成することが出来る．例えば中心電荷が小さなヴィラソロ頂点代数やハイゼンベルグ頂点代数に対して対数項付き加群を構成することが出来る．

研究成果の概要（英文）：(1) For a vertex algebra V, I define the notion of a V-module with logarithmic terms, which is a natural generalization of a V-module. Moreover I construct the corresponding Zhu algebras. Namely, I establish a one-to-one correspondence between the simple V-modules with logarithmic terms and the simple left modules over the Zhu algebra. This correspondence is a natural generalization of some results by Zhu.

(2) I construct examples of modules with logarithmic terms for lattice vertex algebras. Since lattice vertex algebras have many interesting vertex subalgebras, these examples are also modules with logarithmic terms over such vertex algebras. For example, we have modules with logarithmic terms over some Virasoro vertex algebras and Heisenberg vertex algebras.

研究分野：代数学

キーワード：代数学

１．研究開始当初の背景

頂点(作用素)代数とは，ムーンシャイン予想の解決や２次元共形場理論の数学的定式化等を目的として 1986 年にボーチャーズによって導入された代数系である．本研究の背景にある，その特別な場合である不変部分代数 V^G 上の加群の研究について説明する．
G を頂点(作用素)代数 V の有限位数の自己同型群としたとき，不変部分頂点作用素代数 V^G 上の加群の圏と，G から構成されるある結合的代数上の加群の圏とが，V に関する適当な条件の下で同値になるという双対性の予想がある．この予想は頂点作用素代数，保型関数，および有限群論を結びつける重要なものである．ドン，リィ，メイソン，安部，永友，宮本，研究代表者等によって予想を検証する形で V^G 加群は活発に研究されてきた．また，V が格子頂点代数の場合には，フレンケル・レポースキー・ミュールマンとボーチャーズによって V^G 加群を用いてムーンシャイン加群が構成され，ムーンシャイン予想の解決において重要な役割を果たした．双対性の予想では，通常の V 加群を一般化した twisted V 加群が基本的な役割を果たしている．この予想の解決に向けて頂点(作用素)代数上の加群論を twisted 加群を拡張しつつ発展させる必要がある．
頂点代数の表現を調べる基本的な道具としてヅー代数と呼ばれる複素数体上の多元環がある． 1996 年にヅーによって頂点作用素代数 V に対して定義されたヅー代数は，V の表現を制御していることが知られている．ヅー代数の既約左加群が，対応する頂点作用素代数Ｖの既約加群と一対一に対応することから，ヅー代数は，頂点作用素代数の表現論，特に既約加群の分類と加群の完全可約性の証明，および加群のトレース関数のモジュラー不変性の証明において重要な役割を果たしてきた．1998 年にドン・リィ・メイソンは，ヅーの結果を拡張する形で， twisted 加群に対応するヅー代数を定義し，twisted 加群に対して上記と同様の性質を示した．しかし，V 加群と V^G 加群を関連させて考察するためにはまだ不十分であったため，研究代表者は拡張されたヅー代数を定義し，それを用いて既約 twisted V 加群が完全可約 V^G 加群であることを示した．上記の双対性の予想から既約 V^G 加群は twisted V 加群を分解することによって得られるはずであるから，この結果は V^G 上の加群論において非常に重要である．さらに山田裕理(一橋大)とともに，リーチ格子に付随する頂点代数の，位数 3 の群による不変部分代数に対して既約加群の分類をおこない，全ての加群が完全可約であることを示した．これはフレンケル達が予想しているムーンシャイン頂点代数の別構成の第一段階に当たること，およびモンスター単純群の位数 3 の元の中心化群と関連するため重要である．
双対性の予想において，twisted 加群は V 加群と V^G 加群とを関連付ける重要な役割を果たしているのだが，twisted 加群は直和を取る操作で閉じていないことから，研究代表者は，通常の加群論を展開するには不十分であり，それを拡張する必要性を感じていた．研究代表者は直和を取る操作で閉じるように twisted 加群の定義を拡張し，(V, T)加群と名付けた．そのボーチャーズ恒等式を求めたのち，対応するヅー代数を構成した．ヅー代数の既約左加群と既約(V,T)加群とが一対一に対応することを示した．このヅー代数は，もとのヅー代数，ドン・リィ・メイソンによる拡張，および宮本・研究代表者による拡張全てを含む統一的なものである．
双対性の予想の解決を目指して，この方向で加群論を拡張し，ヅー代数等を調べる必要がある．

２．研究の目的

(1)　twisted 加群を拡張した加群の性質を明らかにする．特に対応するヅー代数を構成する．
(2) 扱い易い格子に付随する頂点作用素代数と位数が小さい自己同型群に対して，不変部分代数の表現を決定するとともに，その結果を用いて正則な頂点作用素代数の例を構成する．

３．研究の方法

頂点代数の拡張された加群に対してその性質を調べる．通常の加群に対してこれまで積み上げられてきた結果の類似が成立することを確かめていく．まず対応するヅー代数の構成をおこなう．そのヅー代数は，研究代表者が以前定義した拡張されたヅー代数のさらなる拡張になっているはずなので，その研究を発展させれば構成可能である．これまでにヅー，ドン，リィ，およびメイソンによってなされてきた通常のヅー代数の構成も参考にする．格子頂点代数に対して計算機を用いた計算機実験をおこない，不変部分代数の構造，およびその加群の構造を調べる．

４．研究成果

(1) 加群が完全可約とは限らない頂点代数の表現論においては，通常の intertwining 作用素に対数項を許した対数的 intertwining 作用素が現れることがよく知られており，対数的共形場理論に関連して盛んに研究されている．研究代表者は，頂点代数の誘導加群を考察する過程で，加群自体に対数項を許したものを扱うことが自然であると考え，頂点代数 V 上の加群を，作用に対数項を許すように拡張した．この拡張された加群を対数項付き(V,T)加群と呼んでいる．そのボーチャーズ恒等式を求めた．また，対応するヅー代数を構成し，対数項付き(V,T)加群がそのヅー代数で制御されることを示

した．既約な対数項付き(V,T)加群と，ヅー代数の既約左加群とは一対一に対応していることを示した．この結果は，ヅーが通常の加群に対して示した結果，および研究代表者が以前導入した(V,T)加群に対して示した結果の自然な拡張になっている．ただし，(V,T)加群および対数項付き(V,T)加群のモジュラー不変性はまだ分かっていない．

(2) 格子頂点代数に対して，非自明な対数項付き(V,T)加群の例を構成した．これはハイゼンベルグ頂点代数の，通常の意味での既約でない直既約加群を格子頂点代数上に誘導したものになっている．格子頂点代数の通常の加群は全て完全可約であることが知られているが，その拡張である対数項付き加群はそうなっていないという点で興味深い．また格子頂点代数は多くの興味深い頂点代数を部分頂点代数として持つため，この例から多くの対数項付き(V,T)加群の例を構成することが出来る．例えば中心電荷が小さなヴィラソロ頂点代数やハイゼンベルグ頂点代数に対して非自明な対数項付き(V,T)加群を構成することが出来る．

(3) 今後の展望
第一に，加群の定義をテンソル積と誘導加群を取る操作で閉じるように拡張する．これは上に述べた対数項付き(V,T)加群に関する結果を発展させる研究である．既に具体例に対しては加群の拡張をおこなっており，その性質を調べている状態である．また，既にハイゼンベルグ頂点代数上の通常の次数付き加群Mから格子頂点代数上の対数項付き加群の例を構成しているため，構成したものが実際にMの誘導加群になっていることを確認中である．その後は，ハイゼンベルグ頂点代数上の，有限位数の自己同型に付随する次数付きtwisted加群から格子頂点代数上の対数項付き加群を構成し，対数項付き加群の例を増やす．これは通常の加群で用いた方法を発展させることにより可能である．また，対数項付き加群に対応するヅー代数は既に構成しているので，それを用いてハイゼンベルグ頂点代数と格子頂点代数の対数項付き既約加群の分類を行う．次にハイゼンベルグ頂点代数上と格子頂点代数上の対数項付き加群それぞれに対してテンソル積を構成し，テンソル積をとる操作で閉じていることを確認する．これは，それぞれの頂点代数上で通常の加群に対するテンソル積の構成法がよく分かっていることから，その構成法を拡張することにより可能である．このテンソル積を用いてハイゼンベルグ頂点代数上の次数付きかつ対数項付き加群を格子頂点代数上に誘導したものが，格子頂点代数上の対数項付き加群であることを示す．通常の加群の場合を真似て，ハイゼンベルグ頂点代数上と格子頂点代数上の次数付きかつ対数項付き加群に対して付随する保型関数を定義し，具体例に対して計算する．
第二に，第一の結果の応用として不定符号の格子に付随する格子頂点代数の不変部分代数の加群を決定するとともに，正則な頂点代数の例を構成する．

５．主な発表論文等
（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）
① Kenichiro Tanabe and Hiromichi Yamada, Fixed point subalgebras of lattice vertex operator algebras by an automorphism of order three, Journal of the Mathematical Society of Japan 65 (2013), no. 4, 1169-1242, 査読有. doi:10. 2969/jmsj/06541169
② Kenichiro Tanabe, Finite-dimensional vertex algebra modules over fixed point differential subfields, Journal of Algebra 356(2012), 1-16, 査読有. doi:10. 1016/j. jalgebra. 2012. 02. 001

〔学会発表〕（計 9 件）
① Kenichiro Tanabe, On a generalization of intertwining operators for vertex algebras, Taitung Workshop on group theory, VOA and algebraic combinatorics, 2015 年 3 月 7 日--10 日, National Taitung University(台湾台東市).
② Kenichiro Tanabe, **頂点代数上の対数項付き加群について,** 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会, 2014 年 9 月 25 日--28 日, 広島大学(広島県東広島市).
③ Kenichiro Tanabe, A generalization of modules over vertex algebras, Algebras, Groups and Geometries 2014, 2014 年 6 月 25 日--26 日, 東京大学(東京都**目黒区**).
④ Kenichiro Tanabe, 頂点代数上の対数項付きの加群について, 第３１回代数的組合せ論シンポジウム, 2014 年 6 月 19 日--20 日, 東北大学･片平キャンパス(宮城県仙台市).
⑤ Kenichiro Tanabe, A generalization of modules over vertex algebras, Hualien Workshop on finite groups, VOA, algebraic combinatorics and related topics, 2014 年 3 月 20 日--3 月 23 日, National Dong Hua University (台湾花蓮市).
⑥ Kenichiro Tanabe, 頂点作用素代数の加群の一般化と Zhu 代数, 頂点作用素代数と超弦理論, 2014 年 1 月 31 日--2 月 1 日, 立教大学(東京都豊島区).
⑦ Kenichiro Tanabe, A generalization of twisted modules over vertex algebras, International Workshop on Noncommutative Analysis and its Future Prospects, 2013 年 8 月 5 日--7 日, 北海道大学(北海道札幌市)
⑧ Kenichiro Tanabe, On modules with logarithms over vertex algebras, Taitung Workshop on group theory, VOA and algebraic combinatorics, 2013 年 3 月 25 日―28 日,

National Taitung University(台湾台東市).
⑨ Kenichiro Tanabe, A generalization of twisted modules over vertex algebras, Conference on Groups, VOAs and Related Structures in Honor of Masahiko Miyamoto, 2012 年 9 月 10 日--14 日, 筑波大学(茨城県つくば市).

６．研究組織

(1)研究代表者

田邊顕一朗（TANABE, Kenichiro）

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：10334038

(2)研究分担者

なし.

(3)連携研究者

なし.