様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ５ 月 ２５ 日現在

機関番号：１０１０２
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４０００４

研究課題名（和文）ミラー対称なＫ３曲面の数論的対称性の考察

研究課題名（英文）Arithmetic refinement of mirror symmetry for K3 surfaces

研究代表者
後藤　泰宏（GOTO, YASUHIRO）

北海道教育大学・教育学部・教授

研究者番号：４０３１２４２５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，ミラー対称なK3曲面を有限体上や代数体上で考察し，数論的観点からミラー対称性の精密化を試みた。考察したK3曲面は，重さ付き3次元射影空間内においてデルサルト型方程式（及びその1次元変形）により定義される代数曲面で，反シンプレクティックな対合を持つものである。そのようなK3曲面に対して，形式的ブラウアー群の高さを用いてミラー対称性の精密化を図った。そして，ヤコビ和等を用いて計算される曲面のゼータ関数とその特殊値にミラー対称性が反映されることを確認するとともに，曲面のL関数がモジュラー性をもつことを示した。

研究成果の概要（英文）：We studied mirror symmetry for K3 surfaces over finite fields and number fields, and aimed to refine their mirror-symmetric properties from arithmetic viewpoints. The K3 surfaces we considered are algebraic surfaces in weighted projective 3-spaces with non-symplectic involution and defined by the equations of Delsarte type or by one-dimensional deformations of them. For such K3 surfaces, we computed the height of their formal Brauer groups and refined mirror symmetry for K3 surfaces using the height of formal groups. We then observed mirror symmetry among the zeta-functions of such K3 surfaces and also in their special values described in terms of Jacobi sums etc. Furthermore, we showed the modularity of L-functions of the K3 surfaces we considered.

研究分野：数論的代数幾何

キーワード：数論幾何　Ｋ３曲面　ミラー対称性　デルサルト型曲面　ゼータ関数　形式群　モジュラリティ

１．研究開始当初の背景

K3 曲面のミラー対称性の研究は，1990 年代に本格化した。ミラー対称な K3 曲面の構成法としては，Roan 氏の群作用による商を用いた方法，Batyrev 氏のトーリック幾何を用いた手法，ピカール群の格子構造に着目した Dolgachev 氏の構成法，Nikulin 不変量を利用した Dolgachev-Voisin 氏の構成法などが知られていた。また，本研究開始当時は，Kontsevich 氏の導入したホモロジー的ミラー対称による K3 曲面のミラー対称性にも注目が集まっていた。

上記のミラー対称性はいずれも複素数体上で構成される。有限体上でミラー対称性を考察した例としては，有理点の個数の関係性に着目した Wan 氏の研究，ゼータ関数の分解を用いてフェルマー型５次超曲面の変形のミラー対称性を考察した Candelas, de la Ossa, Villegas 氏らの研究，ミラー対称なカラビ・ヤウ多様体の形式群を調べた本研究代表者の結果などがあった。しかしながら，そのような有限体上の研究は，まだ数少ない状況であった。

上記のような状況の中，本研究では，Nikulin 不変量が(r,a,δ)の K3 曲面の族と(20-r,a,δ)の K3 曲面の族を対応させる Dolgachev-Voisin 氏のミラー対称性を，有限体や代数体上で考えようとした。それまで主として複素数体上で発展してきたミラー対称性の研究と，ゼータ関数やＬ関数に係わる数論的研究の交差点に位置する研究である。研究開始までの段階で，本研究者は重さ付き射影空間内の代数多様体を有限体上で研究してきており，n 次元重さ付き射影空間の中で対角型方程式により定義される（重さ付き）フェルマー型超曲面や，フェルマー型方程式をやや一般化した n+1 個の単項式の和で定義されるデルサルト型超曲面を詳しく調べていた。そこでの主要結果は，デルサルト型方程式で定義されるカラビ・ヤウ多様体の代数的サイクル，ゼータ関数とＬ関数，形式的ブラウアー群の計算である。また，2009 年からは，由井典子氏（本研究の研究協力者）と Ron Livné 氏との共同で，ミラー対称な３次元カラビ・ヤウ多様体のゼータ関数とモジュラリティについて調べていた。その研究の過程で，反シンプレクティックな対合を持つ K3 曲面を数多く構成することができ，本研究の主題である Dolgachev-Voisin 氏のミラー対称性を数論的観点から考察することを着想し，本研究を開始した。

２．研究の目的

本研究の目的は，Dolgachev-Voisin 氏が定義した K3 曲面のミラー対称性を，数論的観点から精密化することである。

本研究で考察する曲面は，重さ付き３次元射影空間内の quasi-smooth なデルサルト型曲面（とその変形）を特異点解消して得られる K3 曲面である。そのような曲面は，複素数体上のみならず有限体上や代数体上でも定義でき，数値的な考察も可能である。そのような K3 曲面に対して，本研究では，次の４つの研究目標を設定した。

（1）（Dolgachev-Voisin 氏の意味での）ミラー対称な K3 曲面の特定

まず，考察対象となる K3 曲面の族を決定する。具体的には，重さ付き３次元射影空間内のデルサルト型曲面とその１次元変形を調べ，反シンプレクティックな対合を持つ K3 曲面の族を探す。そして，それらの Nikulin 不変量を計算してミラー対称性を確認する。

（2）形式的ブラウアー群を用いたミラー対称性の精密化

（1）で得られたミラー対称な K3 曲面を有限体上で考えて，形式的ブラウアー群を考察する。一般に，正標数の体上の K3 曲面の形式的ブラウアー群は１次元の形式群となるので，その性質は形式群は高さによって決まる。高さの値を具体的に計算したり形式群の構造を詳しく調べたりすることによって，ミラー対称な２つの K3 曲面の間に，形式群に関する対称性がないか考察する。

（3）ゼータ関数とその特殊値を用いたミラー対称性の精密化

ここでは，有限体上のデルサルト型曲面のみ扱い，１次元変形は扱わない。デルサルト型曲面は，フェルマー型曲面を有限群の作用で割った商に双有理になることが知られている。それゆえ，フェルマー型曲面と同様，デルサルト型曲面のゼータ関数の主要部はヤコビ和を用いて記述できる。この目標では，ゼータ関数とその特殊値を計算し，それらを通してミラー対称性の検出を試みる。

（4）Ｌ関数の比較によるミラー対称性の精密化

ここでもデルサルト型曲面に集中する。目標（3）との違いは，K3 曲面を代数体上で考えることである。上記（3）の結果を用いて K3 曲面のＬ関数をできる限り具体的に記述し，その無限級数展開における係数を計算する。そして，ミラー対称な２つの K3 曲面の間に，Ｌ関数の係数やモジュラリティにおける対称性がないか考察する。

上記４つの目標について，平成 24 年度は，研究対象の特定と形式的ブラウアー群の分析を行うことを課題とし，平成 25 年度は，ゼータ関数とその特殊値を用いたミラー対称性の精密化を行うことを目指した。そして最終年度の平成 26 年度は，曲面のＬ関数の比較によるミラー対称性の精密化を行うことを計画した。

３．研究の方法

研究を進める上での，実際の活動に係わる

部分と数学的な研究手法に関する部分に分けて記載する。

（1）具体的な研究活動

本研究は，研究代表者の個人的活動を中心とした研究であった。日常的には，代数幾何や数論関係の文献や論文を用いて問題解決に取り組み，定期的にはセミナーや研究集会に参加して専門家たちと情報交換を行い，研究の進展を図った。また，国内外で合計８回の研究発表を行い，専門家たちから多くの助言やコメントをもらい，それをフィードバックする形で研究方向の修正や調整を行った。また，計算ソフト Magma や Maple を用いてゼータ関数，Ｌ関数，形式群の計算を行った。さらに，平成 26 年度に研究集会「函館数論幾何ワークショップ」を企画し，自分とやや異なった分野における研究のアイデアにも目を向けた。

本研究のベースは個人的研究にあったが，研究協力者（海外共同研究者）であるクイーンズ大学教授・由井典子氏との連携は本質的に重要であった。由井氏とは，日常的には電子メールで意見交換を行い，年に２度ないし３度直接会って，集中的に議論した。そのような研究打合せを通して，共著論文の執筆作業を進めた。また，形式群の考察においては，国立台湾大学助手（現・准教授）の Jeng-Daw Yu 氏に協力を依頼した。

（2）数学的研究手法

研究方法の数学的部分は次のとおりである。年度ごとにまとめる。

①平成 24 年度は，研究対象の特定と形式的ブラウアー群の分析を行った。具体的には，次の３つの目標に沿って研究を進めた。

・重さ付き３次元射影空間内のデルサルト型曲面とその１次元変形を（計算機を用いて）列挙し，反シンプレクティックな対合を持つものを特定する。

・上で特定した K3 曲面の族に対して Nikulin 不変量を計算しミラー対称性を確認する。先行研究において，Nikulin 不変量(r,a,δ)のうち，ｒとａは比較的容易に求められたが，δの計算は難しかった。そこで，δの特定に時間がかかるようであれば，その計算を保留することにした。

・研究対象を特定した後は，得られた K3 曲面を有限体上で考え，形式的ブラウアー群のレベルで対称性の有無を議論する。

②平成 25 年度は，ミラー対称な K3 曲面を有限体上で考察し，ゼータ関数とその特殊値における対称性の検出を試みた。ここではデルサルト型曲面に集中し，１次元変形は扱わなかった。（その理由は，変形を導入することにより，ゼータ関数の具体的計算が極めて難しくなるからである。）平成 24 年度に完了しなかった形式的ブラウアー群の考察を継続するとともに，次の２つの方法に沿って研究を進めた。

・デルサルト型曲面のゼータ関数の主要部はヤコビ和を用いて記述できるので，ヤコビ和の性質を用いて，K3 曲面のコホモロジー群やゼータ関数の分解を調べる。

・必要に応じて，計算ソフト Magma を用いてゼータ関数とその特殊値を数値的にも計算し，ミラー対称性を探る。

③本研究の最終年度となる平成 26 年度は，ミラー対称な K3 曲面を代数体上で考察し，Ｌ関数のモジュラリティの観点からミラー対称性の精密化を試みた。ここでも，デルサルト型曲面に集中し，１次元変形は扱わなかった。Ｌ関数のモジュラリティについては平成 25 年に少し成果が得られていたので，次の３つの方向で研究を進めた。

・ゼータ関数の主要部がヤコビ和を用いて記述できることから，デルサルト型曲面のＬ関数の主要部を量指標から作られるＬ関数で記述する。

・上で得たＬ関数の記述をもとに，Ｌ関数やモジュラリティの観点からミラー対称性の精密化を試みる。

・必要に応じて，計算ソフト Magma を使ってＬ関数やその特殊値の数値計算を行う。

４．研究成果

本研究の主要結果は，ミラー対称な K3 曲面を有限体上や代数体上で考察し，数論的観点からミラー対称性の精密化や新たな特徴づけを試みたことである。いろいろな不変量を具体的に計算できる曲面に焦点を当てることにより，（Dolgachev-Voisin の）ミラー対称性は，形式群との関係性はやや弱いものの，ゼータ関数の特殊値やＬ関数との関連は十分強いことが分かった。

考察した K3 曲面は，重さ付き３次元射影空間内において，デルサルト型方程式（及びその１次元変形）により定義される代数曲面で，反シンプレクティックな対合を持つものであった。K3 曲面のミラー対称性は，Nikulin の不変量の入れ替えによって定義した。そのような K3 曲面の幾何的構造を調べ，コホモロジー群，形式的ブラウアー群，ゼータ関数，Ｌ関数を計算し，Ｌ関数のモジュラリティについて考察した。以下では，まず研究成果を４つの項目に分けて記述する。項目は，研究対象の特定とミラー対称性の検出，形式的ブラウアー群の考察，ゼータ関数の計算，Ｌ関数の計算である。その後，得られた研究成果の位置づけを述べ，今後の課題と展望についてまとめる。

（1）<u>研究対象の特定とミラー対称性の検出</u>

本研究の考察の対象は，重さ付き３次元射影空間内のデルサルト型曲面とその１次元変形である。重さ付き３次元射影空間は本質的に 95 個あるが，その中で 86 個が本研究の対象となることが分かり，各々の空間において反シンプレクティックな対合を持つ K3 曲面の形を特定した。そして，得られた K3 曲面

の族に対してNikulin不変量aとrを計算し，ミラー対称性を確認した。Nikulin 不変量のうちδについては一部の曲面について計算できた。

（2）形式的ブラウアー群

(1)で特定したK3曲面を有限体上で考え，形式的ブラウアー群の高さを計算し，形式群の高さにおいてミラー対称性の分析を行った。一部の K3 曲面についてはミラー対称性と形式群の高さの間に相関関係を確認できたものの，全般的には強い相関性を見いだせなかった。しかしながら，そのことは逆に，形式群の高さがミラー対称性を細分化する指標になることを示すものであり，新たな研究課題を見つけることができた。

（3）ゼータ関数

重さ付きデルサルト型 K3 曲面のゼータ関数について，そのモジュラリティに係るゼータ関数の重要な因子をヤコビ和等を用いて記述した。さらに，ゼータ関数の特殊値をヤコビ和等を用いて記述し，Artin-Tateの関係式を用いることにより，ゼータ関数の特殊値の構成因子の中にミラー対称性を反映する因子があることが分かった。

（4）Ｌ関数

（1）で特定したK3曲面のうちゼータ関数とその特殊値を求めることができたものについて，そのＬ関数を計算し，モジュラリティのレベルでミラー対称性を考察した。その結果，Ｌ関数のモジュラリティに関する対称性を検出した。つまり，ミラー対称な K3 曲面の一方のＬ関数がモジュラー性を持てば，他方もまたモジュラー性を持つことを確認した。また，Ｌ関数の特殊値における対称性を（構成因子であるゼータ関数のレベルで）部分的に確認し，いくつかの曲面に対しては，計算機を用いてゼータ関数の特殊値を数値的に計算した。

（5）研究成果の位置づけ

上に述べた結果は、数論的観点からミラー対称性を議論する手掛かりを与えた点と，計算可能な実例を数多く見つけられた点で意義がある。それらのうち，多様体のゼータ関数，Ｌ関数，モジュラリティに係る結果は，数論幾何として位置づけられるとともに，計算数学の一部としても位置づけられる。また，形式的ブラウアー群に関する新たな知見は，正標数の代数幾何に関する結果であり，正標数の多様体のモジュライ理論に関係している。

なお，本研究の一環として開いた数論幾何に関する研究集会「函館数論幾何ワークショップ」(2014年5月26日～2014年5月28日，函館市中央図書館及び北海道教育大学函館校）は，数論と代数幾何に携わる専門家らの交流を促す一企画となった。

（6）今後の課題と展望

今後の方向性は，現時点で少なくとも４つ考えられる。

・１つ目の課題は，形式的ブラウアー群の高さを利用して，K3曲面の間に数論固有の対称性を見つけることである。つまり，幾何学的な性格をもつ通常のミラー対称性から少し離れて考察することにより，新たな対称性が見つかる可能性がある。

・２つ目の課題は，ゼータ関数の特殊値に現れたミラー対称性の影響をさらに詳しく調べることである。現在この方向で考察を進めており，論文を準備中である。これは，本研究の延長線上に位置する課題である。

・３つ目の課題は，本研究で十分扱えなかった（1次元）変形付き K3 曲面の研究である。変形を付けると具体的な数値計算が格段に難しくなるものの，変形を加えた多様体は，数多くの応用を内在する。今後は，変形を持つデルサルト型多様体の考察を新たな研究課題として設定したい。

・最後に，ミラー対称性との関係が薄くなるが，K3曲面に対するより一般の自己同型写像を用いて類似の研究ができないか探っていきたい。つまり，本研究では反シンプレクティックな対合に注目して K3 曲面を考察してきたが，K3曲面には他にも多くの自己同型写像が存在する。それらの数論的性質を探ることも今後の研究課題としたい。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　2　件）

① Yasuhiro Goto, Ron Livné and Noriko Yui，Automorphy of Calabi-Yau threefolds of Borcea-Voisin type over Q, Communications in Number Theory and Physics，査読有，Vol. 7, No. 4, 2013, pp. 581－670, DOI: http://dx.doi.org/10.4310/CNTP.2013.v7.n4.a2

② Yasuhiro Goto, Ron Livné and Noriko Yui，The automorphy of certain K3 fibered Calabi-Yau threefolds with involution over Q, e-print ArXiv，査読無，2012, arXiv:1212.3399, http://arxiv.org/abs/1212.3399

〔学会発表〕（計　8　件）

① Yasuhiro Goto，Formal groups attached to Calabi-Yau varieties，Weekend Workshop on Algebraic Varieties with special emphasis on Calabi-Yau manifolds，2014年11月15日，トロント大学Fields数理科学研究所(カナダ，トロント市)

② Yasuhiro Goto, Calabi-Yau threefolds from arithmetic viewpoints, Queen's University 数学・統計学科談話会, 2014年11月14日, Queen's University（カナダ，キングストン市）

③ Yasuhiro Goto, Review on the Artin invariant of supersingular K3 surfaces, Calabi-Yau varieties and Mirror Symmetry Seminar, 2014年11月13日, Queen's University 数学・統計学科（カナダ，キングストン市）

④ Yasuhiro Goto, Calabi-Yau varieties in positive characteristic, 第2回K3曲面・エンリケス曲面ワークショップ, 2014年8月31日, 旭川市国際会議場第2会議室（北海道旭川市）

⑤ Yasuhiro Goto, Formal groups of Calabi-Yau threefolds of Borcea-Voisin type, Tsuda College Mini-workshop on Calabi-Yau Varieties: Arithmetic, Geometry and Physics, 2014年8月7日, 津田塾大学中島記念ホール（東京都小平市）

⑥ Yasuhiro Goto, Some arithmetic aspects of Calabi-Yau threefolds of Borcea-Voisin type, Arithmetic, differential, and geometry, 2013年11月1日, 東北大学理学部（宮城県仙台市）

⑦ Yasuhiro Goto, K3 surfaces with involution and their formal Brauer groups, 2012 NCTS Japan-Taiwan Joint Conference on Number Theory, 2012年8月27日, National Center for Theoretical Sciences in National Tsing Hua University（台湾新竹市）

⑧ 後藤泰宏, K3 surfaces of Delsarte type and Nikulin's invariants, 津田塾大学数学・計算機科学研究所談話会, 2012年7月, 津田塾大学数学・計算機科学研究所（東京都小平市）

〔その他〕
北海道教育大学ホームページ・研究者総覧内「後藤泰宏」の項目
http://kensoran.hokkyodai.ac.jp/huehp/KgApp?kyoinId=ymiegggggge&keyword=

６．研究組織

(1)研究代表者
後藤　泰宏（GOTO, Yasuhiro）
北海道教育大学・教育学部・教授
研究者番号：40312425

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし

(4)研究協力者（海外共同研究者）
由井　典子（YUI, Noriko）
クイーンズ大学・数理科学研究科・教授