

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 9 日現在

機関番号：10103

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540005

研究課題名(和文) 保型形式の周期，合同の総合的研究

研究課題名(英文) Periods and congruences of modular forms

研究代表者

桂田 英典 (KATSURADA, Hidenori)

克蘭工業大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：80133792

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：様々な lift (Ikeda-Miyawaki lift, Kim-Shahidi lift) とそうでないもの間の合同を与える素イデアルの特徴付について予想を提出し，数値例を計算した。(伊吹山知義, C. Poor, D. Yuen, 竹森翔との共同研究) Duke-Imamoglu-Ikeda lift の twisted Koecher-Maass series の明示公式を得た。これを半整数重さの保型形式の Rankin-Selberg 級数の特殊値の研究に応用した。二次形式の Gross-Keating 不変量の性質を研究し，それを Siegel series の明示公式に応用した。(池田保との共同研究)

研究成果の概要(英文)：We proposed conjectures on prime ideals giving congruence between various lifts (eg. Ikeda-Miyawaki lift, Kim-Shahidi lift) and modular forms not coming from the lifts. I also gave numerical examples which support the conjectures. (Joint works with T. Ibukiyama, C. Poor, D. Yuen and S. Takemori) I gave an explicit formula for the twisted Koecher-Maass series of the Duke-Imamoglu-Ikeda lift. We also applied this to special values of the Rankin-Selberg series of half-integral weight modular form. I investigated the properties of the Gross-Keating invariants of quadratic forms, and as an application we gave an explicit formula of the Siegel series of a quadratic forms over any non-archimedean local field.

研究分野：整数論

キーワード：congruence lift L-values Koecher-Maass series Gross-Keating invariant Siegel series

1. 研究開始当初の背景

1変数保型形式 f の Siegel 保型形式あるいは Hermitian 保型形式の空間への lift F に関して次の問題は興味深く重要である。

問題A. F と f の周期の何乗かの比 $\langle F, F \rangle / \langle f, f \rangle$ を f に付随する L-関数の特殊値を用いて表せ。

問題B. 問題Aにおいて $\langle F, F \rangle / \langle f, f \rangle$ が代数的数であったとする。このとき、 F と lift から得られない Hecke 固有形式 G との間の合同を与える素イデアルを問題Aにおける L-関数の特殊値を用いて特徴付けよ。

問題Aについては、これまでもいくつかの研究がなされている(参考文献3, 雑誌論文1, 2, 11.) 私は参考文献1においてこの周期関係が問題Bの解決に重要な役割を果たすことを指摘し, Harder 予想の特別な場合の精密化にあたる。これを契機として同様の研究が行われている(参考文献2.) これらをふまえて, 問題A, Bをさらに一般的な立場で研究することが本研究の動機であった。

2. 研究の目的

上述の問題A, Bに関して, 以下のことを具体的に研究する。

(1) 楕円尖点固有形式 f の様々な lift に対して周期関係式を考察する。特に, 以下の3点を重点的に考察する。

1 Ikeda lift の周期関係式に関する池田の予想を他の Ikeda type lift に拡張し証明する。特に, 山名俊介氏(大阪市大)によって得られた楕円尖点固有形式の Quaternionic Hermitian 保型形式への lift の周期関係式を予想し証明する。

2 池田氏が提起した Ikeda-Miyawaki lift に関する周期関係式の予想の証明を考える。

3 H. Kim と F. Shahidi がその存在を予想し, D. Ramakrishnan と Shahidi によって証明された2次のベクトル値 Siegel 保型形式への lift (これを Kim-Ramakrishnan-Shahidi lift あるいは K-R-S lift と呼ぶ) に対してその周期関係式の厳密な予想を得る。

(2) 周期関係式の結果を f の lift と lift から得られない固有形式の合同へ応用する。特に, (1)でのべた lift の他にすでに周期関係式の知られている例(Kudla lift 等)についても同様の考察をする。

3. 研究の方法

(1) Ikeda lift の周期に関する池田の予想の解決(雑誌論文1), Hermitian Ikeda lift の周期に関する池田の予想の解決(参考文献3)における手法を分析する。

(2) 上の結果をもとに私が行った Ikeda lift と non-Ikeda lift の合同に関する結果(参考文献1, 2)を他の Ikeda type lift の場合に拡張する。そのために, 2の結果の証明に用い

た周期関係式と私が1で開発した「Siegel 尖点形式の合同素イデアルのそのスタンダード L-関数の特殊値による特徴付け」を拡張する。

(3) f の Ikeda-Miyawaki lift F の周期に関する Ikeda 予想を証明することを考える。

もし, 証明がうまくいかないときには, 特別なものについて例を計算してみる。上の結果を用いて, 楕円尖点固有形式 f の Miyawaki lift と non-Miyawaki lift の合同を特徴付ける。そのためまず正確な予想を定式化する。

(4) I-K-S lift に対して周期予想を定式化し, 計算例を挙げる。その他, 興味深い lift に対して同様のことを試みる。

参考文献(下記の雑誌論文, 学会発表を除く)

1 H. Katsurada, Congruence of Siegel modular forms and special values of their standard zeta functions, Math.Z. 259(2008)97-111

2 H. Katsurada, Congruence between Duke-Imamoglu-Ikeda lifts and non-Duke-Imamoglu-Ikeda lift, Preprint

3 H. Katsurada, On the period of the Ikeda lift for $U(m, m)$, Preprint

4. 研究成果

(1) Ikeda-Miyawaki lift の合同を与える素イデアルの特徴付けについて予想を提出し, 数値例を確かめた(伊吹山知義, C. Poor, D. Yuen との共同研究.) この成果は, 雑誌論文9となった。また, 学会発表3で発表した。これを基にして triple product L-関数の特殊値に関する Bloch-Kato 予想を解く手がかりが得られる可能性がある。これは, 研究目標(1)の最初の部分を具現化したものである。

(2) Duke-Imamoglu-Ikeda-lift の twisted Koecher-Maass 級数の明示公式を求め, それを半整数重さの保型形式のある Dirichlet 級数の整数点での代数性に应用した。この成果は雑誌論文4, 5となった。また, この成果を学会発表3, 5で発表した。これは, 本研究の副産物として得られたものである。従来は, 半整数重さの保型形式の Dirichlet 級数の半整数点での代数性が知られていたが, これはそれとは異なるまったく新しいものである。

(3) Hermitian Ikeda lift の周期に関する池田の予想の精密化を行いそれを解決した。この成果の一部は雑誌論文2, 7となった。また, この成果を学会発表3, 4で発表した。又, この成果を証明を含めて集中講義(京都大学理学研究科2013.12.16-20)で講義した。これは, Hermitian 保型形式の合同問題に应用される可能性がある。これは, 研究目標(1)の1つを具現化したものである。

(4) Duke-Imamoglu-Ikeda lift に付随するある半整数重さの保型形式の Koecher-Maass 級数の明示公式を求めた(河村尚明との共同研

究.)この成果は雑誌論文 8 となった.この結果は雑誌論文 1 に応用された.これは,研究目標(1) ¹ の 1 つを具現化したものである.(5)K-R-S lift の周期と合同について予想をたて,それを数値例で確かめた(竹森翔との共同研究.)その成果を学会発表 1 で発表した.これは,tempered な Siegel 保型形式の合同に関して初めて得られた結果である.研究目標(1) ³ の最初の部分を具現化したものである.(6) Gross-Keating invariant の精密な性質を調べた(池田保との共同研究.)この成果を学会発表 2 で発表した.これは,一般の局所体の Siegel 級数の明示公式を得ることに応用される.これは今後,局所体の 2 次形式論のみならず,数論幾何にも大きな影響を与える基礎的結果である.また,総実代数体上の Ikeda lift の周期に関する研究にも有効な手段を提供するものと思われる.

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 13 件)

- 1.(査読有)H. Katsurada and H. Kawamura, On Ikeda's conjecture on the period of the Duke-Imamoglu-Ikeda lift, Proc. London math. Soc. To appear
- 2.(査読有)H. Katsurada, Koecher-Maass series of the Ikeda lift for $U(m,m)$ To appear in Kyoto J. Math. 55(2015) 32 1-364, DOI:10.1215/21562261-2871776
- 3.(査読有)T. Ibukiyama and H. Katsurada, Exact critical values of the symmetric fourth L function and vector valued Siegel modular forms, J. Math. Soc. Japan 66(2014)139-160 DOI:10.1969/jmsj/06610139
- 4.(査読有)H. Katsurada, On the special values of certain L-series related to half-integral weight modular forms, Automorphic Form, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 115, Springer(2014) 119-137 DOI:10.1007/9783-3-319-11352-4_9
- 5.(査読有)H. Katsurada, Explicit formulas for the twisted Koecher-Maass series of the Duke-Imamoglu-Ikeda lift and their applications, Math.Z. 275(2014)1049-1075 DOI:10.1007/s00209-013-1232-z
- 6.(査読有)S.Boecherer (with an appendix by H. Katsurada) On the space of Eisenstein series for $\Gamma_0(p)$: Fourier Expansions, Comment. Math. Univ. St. Pauli 63(2014) 3-22, <https://rikkyo.repo.nii.ac.jp/>
- 7..(査読有)H. Katsurada, Koecher-Maass series of the adelic Hermitian Eisenstein series and the adelic Hermitian Ikeda lift,

- Comment. Math. Univ. St. Pauli, 63(2014) 137-159, <https://rikkyo.repo.nii.ac.jp/>
- 8(査読有)H. Katsurada and H.Kawamura, Koecher-Maass series of a certain half-integral weight modular form related with the Duke-Imamoglu-Ikeda lift, Acta. Arith. 162(2014)1-41 DOI:11/4064/aa162-11
 - 9(査読有)T. Ibukiyama, H. Katsurada, C. Poor, and D. S. Yuen, Congruences to Ikeda-Miyawaki lifts and triple L-values of elliptic modular forms, J. Number Theory 134(2014)142-180 <https://dx.doi.org/10.1016/j.jnt.2013.07.013>
 - 10(査読有) M. Chida, H. Katsurada, K. Matsumoto, On Fourier coefficients of Siegel modular forms of degree two with respect to Congruence subgroups, Abhand. Math. Sem. Hamburg(2014)31-47 DOI:10.1007/s12188-013-0087-x
 - 11(査読無) T.Ibukiyama and H. Katsurada, Exact critical values of the symmetric fourth L function and vector valued Siegel modular forms, 数理研講究録 1826(2013)186-198, ISSN 1880-2818
 - 12(査読有) H. Katsurada, Y. Mizuno, Linear dependence of certain L-values of half-integral weight modular forms, J. London Math. Soc. 85(2012) 455-471, DOI:10.1112/jlms/jdr057
 - 13(査読有) H. Katsurada and S. Mizumoto, Congruences for Hecke Eigenvalues of Siegel Modular Forms, Abh. Math. Seminar Hamburg 82(2012) 129-152 DOI:10.1007/s12188-012-0069-4

[学会発表](計 5 件)

- 1 (招待講演) H.Katsurada, Periods and congruences of various lifts of modular forms, Workshop on automorphic forms at Kumamoto(2015. 1.7) 熊本大学 (熊本県, 熊本市)
- 2 池田保, 桂田英典, 二次形式の Gross-Keating 不変量とその応用 RIMS 集会'Modular 形式と保型表現'(2015.2.6)数理解析研究所, (京都府, 京都市)
- 3(招待講演) H. Katsurada, Refined version of Ikeda's conjecture on the period of the Hermitian Ikeda lift and its application, Explicit Theory of Automorphic Forms (2014.3.27)Tongi University (Shanghai, China)
- 4(招待講演)桂田英典, 保型形式の周期と合

同およびそれに関連する話題，京都大学数学
教室談話会 2013.12.18， 京都大学
(京都府，京都市)

5(招待講演)H. Katsurada, On the special
values of certain L-values related with
half-integral weight modular forms,
Modular Forms (2012.9.27) 九州大学
(福岡県，福岡市)

6 . 研究組織

研究代表者

桂田 英典 (KATSURADA Hidenori)

室蘭工業大学・工学研究科・教授

研究者番号：8 0 1 3 3 7 9 2