

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 1 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540008

研究課題名(和文) 量子群および多元環の表現論の幾何学的研究

研究課題名(英文) Geometric study of quantum groups and associative algebras

研究代表者

斉藤 義久 (Saito, Yoshihisa)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：20294522

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題における主な成果は次の2つである。

(1) 近年、アフィン・グラスマン多様体の幾何学に起源を持つMirkovic-Vilonen凸多面体によって有限型量子包絡環の結晶基底を実現する方法がKamnitzerにより開発され、多くの成果が得られている。本研究では、上記理論のアフィン量子包絡環への拡張を行った。

(2) A型Schubert多様体上の交叉コホモロジー複体の特性多様体の既約性について調べ、結晶基底の幾何学的実現を用いる方法により、低ランクの場合に具体形を完全に決定した。

研究成果の概要(英文)：The main results of this research are the followings.

(1) Recently, Kamnitzer gave a new realization of crystal bases of the quantized enveloping algebras of finite types, by using the theory of Mirkovic-Vilinen polytopes which has originated in geometry of affine Grassmannian varieties. In this research, we constructed an analogue of these theories for affine quantized enveloping algebras.

(2) We studied characteristic varieties of intersection cohomology complexes of Schubert varieties in type A. More explicitly, by using the method of geometric realization of crystal cases, we determined the explicit forms of these varieties in low rank cases.

研究分野：表現論

キーワード：結晶基底

### 1. 研究開始当初の背景

1990年代初頭の量子群の理論における次の2つの発見は研究代表者の研究の出発点であり、両者の融合は研究代表者の一貫した研究テーマの1つである：(a) Ringelによる籐の幾何学と量子群の関係の発見、及び Lusztigによる標準基底の理論の創設、(b) Kashiwaraによる結晶基底の理論の創設と、関連する組み合わせ論の発展。実際、結晶基底と籐の幾何学との直接的な関係は、研究代表者等の研究(引用文献の )で明らかになったと言って良い。まずでは籐に付随する代数多様体のラグランジアン部分多様体の既約成分全体の集合に結晶構造を定義し、それが結晶として量子群の冪零部分の結晶基底と同型になることを証明した。続いてでは、中島啓による籐多様体を用いて、量子群の既約表現の結晶基底を幾何学的実現を与えた。

近年、結晶基底の幾何学的理論は新たな展開を見せている。Braverman-Gaitsgoryは、アフィン・グラスマン多様体の中のある代数的サイクル(Mirkovic-Vilonen (MV)サイクル)全体に定まる結晶構造が、既約表現の結晶基底と同型であることを示した。続いてKamnitzerはMVサイクルのモーメント写像による像として得られる凸多面体(MV多面体)を研究し、その組み合わせ論的特徴付けを与えた。現状で、上記2つの結晶基底の幾何学的実現の間には、両者が結晶として同型であるという以上には、(有限のA型を除くと)詳しい理解は得られておらず、詳細な研究が待たれる状況にある。特に興味深いのはアフィン型の場合であるが、この場合にはアフィン・グラスマン多様体を超える、より大きな無限次元多様体を考察する必要が生じ、本格的な研究は始まっていない。

さらに、アフィン型は多元環の表現論への応用の観点からも非常に興味深い。結晶基底の籐多様体を用いた幾何学的実現に現れる代数多様体は、前射影代数の表現全体のなす代数多様体と一致する。前射影代数は近年の多元環の表現論における中心的研究対象の一つであるが、特に有限型でない場合には、その表現のなす圏はCalabi-Yau圏という特別な構造を持っており、クラスター代数を用いた詳細な研究が知られている(伊山ら、引用文献の)。アフィン型は非有限型の中で最も基本的なケースであり、これまでの研究代表者の研究の蓄積が、十分に適用可能であると考えられる。

### 2. 研究の目的

上述のように代表者はこれまで量子群の表現論、特に結晶基底の理論をDynkin図形に付随する籐から定まる代数多様体(籐多様体)を用いて研究してきた。他方、近年アフィングラスマン多様体の幾何学に基づく結晶基底の新しい幾何学的実現方がKamnitzerを中心に開発されている。本研究の目的は、

決勝基底を仲立ちに上記2つの幾何学と量子群の理論・組み合わせ論を結びつけ、その関係を明らかにすることにある。同時に、得られた成果を多元環の表現論に応用し、最終的には全てを包括する統一的理論体系の構築を目指したい。

本研究の特色は次の2点に集約される。(i)結晶基底の理論を多元環の表現論に応用する点、(ii)結晶基底を中心に据え理論の再構築を目指している点。Ringel-Lusztigによる量子群と籐の表現論の関係の発見以来、多くの研究が「籐の表現論を量子群に応用する」という方向で行われてきた。近年逆向き、すなわち「量子群を籐の表現論に応用する」方向の研究もおこなれつつあるが、主に標準基底の理論を用いるもので、結晶基底の理論が用いられている例はほとんど無い。結晶基底は量子群の $q=0$ における基底であり標準基底と比べ情報が落ちているという欠点を持つが、同時に情報が落ちているが故に組み合わせ論的記述が可能との利点を持つ。本研究では決勝基底を中心に据えることでこれまでの研究の意味を問い直し、結晶基底の長所である組み合わせ論的側面を最大限生かして、理論全体を再構築することを目的としている。この意味で、本研究の着眼点はこれまでになかった斬新なものになっている。

### 3. 研究の方法

本研究はその範囲が多岐に渡るため、研究代表者一人で全体をカバーすることが難しい。そこで、組み合わせ論的表現論の専門家である東京工業大学の内藤聡、代数解析的な表現論の研究者である大阪市立大学の谷崎俊之、多元環の表現論の専門家である名古屋大学の伊山修に参加を依頼し、これら連携研究者と共に研究を進める体制を取った。具体的には、(1)結晶基底の幾何学的理論とそれに付随する組み合わせ論(内藤と連携)、(2)標準基底の理論との関係、代数群の表現論への応用(谷崎と連携)、(3)多元環、特に前射影代数の表現論と結晶基底の理論との関係(伊山と連携)を個別に行い、(4)最終的に全てを統一的な理論体系としてまとめることを目標として、研究を開始した。

(1)について：研究代表者による既存の研究成果(引用文献の)をアフィンA型に特化し、議論をさらに精密化することから始める。特に有限A型の場合には、Young図形を用いた結晶基底の組み合わせの実現が知られており、これをアフィン型に拡張することを目指とする。本研究課題開始以前に研究代表者は、すでに内藤と共同研究を開始しており、部分的な成果が得られている。本研究ではこれを完成させることを目標とする。

(2)について：結晶基底を中心に置くのが本研究の特色であるが、標準基底に基盤を置く既存の理論も当然無視出来るものではない。そうした観点から(2)では、標準基底の幾何学的対応物である籐多様体上の交叉コホモ

ロジ-複体と、その特性多様体の構造を決定する問題を考える。しかしこの問題は非常に難しく、研究期間内の限られた時間内に一般の場合の解決を目指すのは、無謀である。そこで、まずは最も記述が易しいと思われる有限 A 型の場合に議論を限定し、研究を行う。そうすることで組み合わせ論的手法も同時に活用することが出来、一定の成果を期待出来る。仮に A 型に議論を限定したとしても、特性多様体の構造解析は、代数群の表現論、前射影代数の表現論等、量子群以外の代数系の表現論への応用があることが知られており、その重要性を失うものではない。

(3)について：前射影代数の表現の中に、rigid 加群と呼ばれる特別なクラスがある。これは前射影代数の表現全体が作る代数多様体の中で「群作用による軌道の閉包が規約成分と一致する表現」として特徴付けられる。本研究では既約成分が結晶基底でパラメトライズされることを用いて、上の条件を組み合わせ論的な言葉に翻訳し、量子群の表現論の立場からその意味を吟味する。さらに(1)で蓄積されるであろう成果をもとに、アフィン型の場合に伊山らの研究(引用文献の )との関係を精査する。

#### <引用文献>

- Yoshihisa Saito  
Crystal bases and quiver varieties,  
Math. Ann. Vol. 324 (2002), 675-688.  
Masaki Kashiwara and Yoshihisa Saito  
Geometric Construction of Crystal  
bases, Duke Math. J. Vol. 89 (1997),  
9-36.  
A. Buan, O. Iyama, R. Reiten, J. Scott  
Cluster structures for 2-Calabi-Yau  
categories and unipotent groups,  
Compos. Math. Vol. 145 (2009),  
1035-1079.

#### 4. 研究成果

(1) 前出の MV 凸多面体は、実 Cartan 部分代数内の凸多面体として定式化される。この凸多面体の形は Berenstein-Zelevinsky (BZ) data と呼ばれる非負整数の組によって規定されるが、この BZ data は、結晶基底の PBW 型基底によるパラメトリゼーションに現れる非負整数の組(Lusztig data)と等価であることが知られている。本研究では、この非負整数の組(BZ data)をアフィン A 型の場合に拡張することを試みた。より具体的には、(ア) 純粋に組み合わせ論的に拡張を考える方法、(イ) 籠の表現論への応用を見込んで、アフィン籠の言葉を用いて拡張を考える方法、の2つを構成した。当初は両者の関係ははっきりせず、「前者の作る結晶の連結成分の一つに後者の結晶が現れる」ことしかわからなかったが、その後両者が一致すること、すなわち前が連結な結晶であることが証明できた。この結果により、アフィン A 型の場

合には、籠の表現を用いた結晶基底の実現の、組み合わせ論的特徴付けが得られたことになる。これは本研究課題を申請した段階で、絶対に成し遂げたいテーマとして掲げていたものであり、連結性の証明が確立したことで最低限の課題はクリアできたものと考えている。

(2) A 型 Schubert 多様体に付随する交叉コホモロジ-複体の特性多様体に関する研究を行った。この問題は A 型以外の一般の代数群に対しても定式化されるが、一般には特性多様体は規約になるとは限らない。1979 年に Kazhdan と Lusztig は「A 型なら必ず既約になるだろう」との予想があったが、これも研究代表者らにより否定的に解決された(引用文献の )。したがって、問題は特性多様体の具体形の決定に帰着されることになるが、この問題はワイル群の left cell 表現と Springer 表現との対応や、正標数の代数群の表現論等、数々の問題と密接に関わっていることが知られている。この問題に関して、研究代表者は、研究代表者自信が以前開発した「結晶基底の理論を用いて、特性多様体の決定問題を、組み合わせ論の問題に還元するアルゴリズム」をさらに精密化し、比較的ランクが低い場合に特性多様体を完全に決定した。また、同様の論法を用いることで、A 型の場合に、随伴多様体が既約にならない例を構成した。

(3) この問題に関しては、部分的な結果に止まってしまい、学術論文、学会発表等で成果を発表できるレベルには至らなかった。ただし、幾つかの興味深い具体例は得られているので、本研究課題終了後も研究を続けていきたいと考えている。

(4) 量子座標環の表現論を用いて、量子包絡環の PBW 型基底の変換則を記述する方法を確立した。この結果は可解格子模型の研究をその動機として、2 年前に国場・尾角・山田によってすでに発見・証明されていたものではあるが、研究代表者は彼らの手法とは異なり、統一的な手法による新証明を得た。これにより、物事の本質が明らかになっただけでなく、研究代表者が本研究課題を通じて行う、多元環の表現論、および幾何学的表現論に量子座標環の表現論を応用する、新しい道が開けた。このテーマは当初の研究計画には含まれていなかったものであるが、PBW 基底をパラメトリゼーションは MV 凸多面体と等価なデータを与えることが知られており、テーマとして当初の計画を逸脱するものではない。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)  
Yoshihisa Saito,

Quantized coordinate rings, PBW type bases and q-boson algebras, Journal of Algebra, 査読有, Vol.453 (2016), 456-491.

DOI:10.1016/j.jalgebra.2016.10.007

Satoshi Naito, Daisuke Sagaki and Yoshihisa Saito

Toward Berenstein-Zelvinsky data in affine type A, : Proof of the connectedness, Integrable Systems and Representations, Springer Proc. Math. Stat. 査読有, Vol. 40 (2013), 361-402.

Satoshi Naito, Daisuke Sagaki and Yoshihisa Saito

Toward Berenstein-Zelvinsky data in affine type A, : Explicit description, Contemp. Math. 査読有, Vol. 565 (2012), 185-216.

Satoshi Naito, Daisuke Sagaki and Yoshihisa Saito

Toward Berenstein-Zelvinsky data in affine type A, : Construction of affine analogs, Contemp. Math. 査読有, Vol. 565 (2012), 143-184.

Yoshihisa Saito

Mirkovic-Vilonen polytopes and quiver construction of crystal basis in type A, Int. Math. Res. Not. 査読有, IMRN 2012. no. 17, 3877-3928.

[学会発表](計10件)

Yoshihisa Saito,

On Elliptic Artin Groups, Shanghai Conference on Representation Theory, Shanghai, December 2015.

Yoshihisa Saito,

Geometric construction of crystal bases and its applications, Tongji University, Shanghai, October-November, 2015.

Yoshihisa Saito,

Crystal bases, preprojective algebras and MV polytopes, Kyoto University, February, 2015.

Yoshihisa Saito,

Quantized coordinate rings, PBW type Bases and q-boson algebras, Shanghai Workshops on Representation Theory, Tongji University, Shanghai, December, 2014.

Yoshihisa Saito,

Quantized coordinate rings, PBW type Bases and q-boson algebras, Representation Theory and Related Topics (ICM 2014 Satellite Conference), Deagu, August, 2014.

Yoshihisa Saito,

量子座標環とその表現, 第17回代数群と量子群の表現論, 呉羽ハイツ, 2014

年6月.

Yoshihisa Saito,

Schubert 多様体の IC complex の特性サイクルに関する一観察, 大阪表現論セミナー, 大阪市立大学, 2014年3月.

Yoshihisa Saito,

量子座標環とその表現, 大阪市立大学談話会, 大阪市立大学, 2014年1月.

Yoshihisa Saito,

Realization of Crystal bases, The 2<sup>nd</sup> mini-symposium on Representation Theory, Jeju, December 2012.

Yoshihisa Saito,

Toward Berenstein-Zelvinsky data in affine type A, 代数解析学とその周辺, 早稲田大学, 2012年8月.

[図書](計1件)

Susumu Ariki, Hiraku Nakajima, Yoshihisa Saito, Ken-ichi Shinoda, Toshiyuki Tanisaki, Toshiaki Shoji, American Mathematical Society, Contemporary Mathematics 565, Representation Theory of Algebraic Groups and Quantum Groups, 2012.

[産業財産権]

出願状況(計 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

齊藤 義久 (SAITO Yoshihisa)

東京大学大学院数理科学研究科・准教授  
研究者番号: 20294522

(2) 研究分担者

( )

研究者番号:

(3)連携研究者

内藤 聡 (NAITO Satoshi)  
東京工業大学理工学研究科・教授  
研究者番号：60252160

伊山 修 (IYAMA Osamu)  
名古屋大学多元数理研究科・教授  
研究者番号：70347532

谷崎 俊之 (TANISAKI Toshiyuki)  
大阪市立大学理学研究科・教授  
研究者番号：70142916