

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 9 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540009

研究課題名(和文)  $p$ 進体上の  $D$ 加群と  $p$ 進 Hodge 理論研究課題名(英文)  $D$ -modules over a  $p$ -adic field and  $p$ -adic Hodge theory

研究代表者

辻 雄 (Tsuji, Takeshi)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：40252530

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000 円

研究成果の概要(和文)： $p$ 進 perverse 層の  $p$ 進 Hodge 理論および  $p$ 進 Simpson 対応を研究した。前者では単純正規交叉因子に伴う stratification をもつ  $p$ 進 perverse 層や対応する数論的  $D$ 加群のコホモロジーの各 stratum 上の張り合せデータを用いた記述を与え、その間の比較写像を構成した。後者では Higgs isocrystal のコホモロジー論を確立し、局所  $p$ 進 Simpson 対応の圏同値の証明を与えた。

研究成果の概要(英文)：We studied  $p$ -adic Hodge theory for  $p$ -adic perverse sheaves and  $p$ -adic Simpson correspondence. For the former, we gave descriptions of cohomologies of  $p$ -adic perverse sheaves, with the stratification along a simple normal crossing divisor, and corresponding arithmetic  $D$ -modules in terms of the gluing data on the strata, which allow us to construct a comparison map with the two cohomologies. For the latter, we established a cohomology theory for Higgs isocrystals and also gave a proof of the equivalence of categories in the local  $p$ -adic Simpson correspondence.

研究分野：数論幾何学

キーワード： $p$ -adic Hodge theory perverse sheaf  $D$ -module Higgs bundle Simpson correspondence

### 1. 研究開始当初の背景

(1)  $p$  進体上の良い還元を持つ完備非特異代数多様体上の  $p$  進エタール局所系については、Faltings による crystalline 層の理論があり、crystalline 層の圏から filtered convergent  $F$ -isocrystal の圏への忠実充満関手が構成されている。これは複素多様体上のリーマン・ヒルベルト対応の類似とみなせる。複素多様体上では  $p$ -perverse 層と正則 holonomic  $D$  加群の対応 (柏原, Mebkhout) への拡張が知られている。研究代表者はその  $p$  進類似について考察し、単純正規交叉因子から定まる stratification についての  $p$  進エタール perverse 層に crystalline 層の概念を導入し、crystalline 層から filtered  $F$ -Ddagger 加群の圏への忠実充満関手を構成していた。

(2) 複素多様体上の Higgs 束と基本群の表現に関する Simpson 対応の  $p$  進体上での類似が Faltings により構成されている。Faltings の  $p$  進 Simpson 対応では、考えている代数多様体のある大域的な無限小持ち上げの存在が必要であり、また対応が持ち上げの取り方に依存している。研究代表者は、接続付き加群の crystalline site 上の crystal による解釈の Higgs 束における類似として Higgs (iso)crystal の概念を新たに導入し、多様体の無限小持ち上げを用いない理論を構成していた。

### 2. 研究の目的

係数が局所系でない場合や代数多様体の還元が半安定より悪い場合への  $p$  進 Hodge 理論の一般化、および  $p$  進 Simpson 対応の基礎理論の拡充をめざす。具体的には、正規交叉因子に沿って特異性を持つ crystalline  $p$  進エタール perverse 層と対応する数論的  $D$  加群のコホモロジーの比較定理 (Fontaine の crystalline 予想の一般化)、 $p$  進体上の潜在半安定還元をもつ代数多様体の  $p$  進 vanishing cycles を数論的  $D$  加群の言葉でとらえる理論、および (研究代表者の導入した) Higgs (iso)crystal のコホモロジーの基礎理論の確立およびその  $p$  進 Simpson 対応との関係について研究する。

### 3. 研究の方法

(1)  $p$  進 perverse 層の  $p$  進 Hodge 理論の研究 2011 年度までの研究による crystalline  $p$  進 perverse 層の概念の定義と、対応する filtered  $F$ -Ddagger 加群の構成は、 $p$  進 perverse 層および Ddagger 加群を正規交叉因子から定まる各 stratum 上の  $\log p$  進エタール局所系および  $\log$  filtered  $F$ -isocrystal を用いて捉えることによってなされた。従ってコホモロジーの比較を行うには、コホモロジーも各 stratum 上の局所系を用いて大域的に記述する必要がある。Filtered  $F$ -Ddagger 加群は各 stratum 上の  $\log$  filtered  $F$ -isocrystal を用いて明示的かつ大域的に構

成されており、この記述の  $D$  加群に伴う de Rham 複体への拡張を研究する。perverse 層については、各 stratum 上の  $\log p$  進エタール局所系からなる張り合せデータより  $p$  進エタール perverse 層を明示的かつ大域的に構成することが最初の重要なステップとなる。各 stratum の定義方程式を用いた局所的な構成は Beilinson らの先行研究を用いれば可能であり、 $\log$  代数幾何を用いて如何にそれを大域化するかが鍵となる。

(2) Higgs isocrystal のコホモロジーの基礎理論と  $p$  進 Simpson 対応

crystalline cohomology と接続付き加群の de Rham cohomology の比較は、crystalline site 上での Poincare の補題が鍵となっている。2011 年度までに考えた Higgs isocrystal の理論において素朴に Poincare の補題の類似を考えると、収束冪級数環の de Rham 複体があらわれる。 $p$  進コホモロジー論ではよく知られているように、この複体では Poincare の補題は成り立たず、成り立たせるためには、過収束性をみだす収束冪級数に限定する必要がある。従って「正しい」コホモロジー論の確立のためには過収束冪級数環が自然にあらわれる site や Higgs isocrystal の理論をまず構築することになる。 $p$  進 Simpson 対応により対応する一般化表現のコホモロジーとの比較については、2011 年度までの研究で得られていた「過収束周期環の Galois acyclicity」に基づく局所的な比較定理を足がかりとする。

### 4. 研究成果

(1)  $p$  進 perverse 層の  $p$  進 Hodge 理論の研究

① 2011 年度までの研究で得られていた、単純正規交叉因子に伴う stratification についてのエタール perverse 層の、各 stratum 上の  $\log$  エタール局所系からなる張り合せデータ (「nearby cycles 系」) を用いた記述が、 $\log$  エタール perverse 層を導入すると簡明に扱えることを明らかにした。

② 単純正規交叉因子に伴う stratification の各 stratum 上の filtered  $F$ -isocrystal からなる張り合せデータより構成される filtered Ddagger 加群の de Rham 複体と quasi-isomorphic な複体を張り合せデータを用いて明示的に構成した。

③  $p$  進 Hodge 理論を通して②の構成と対応する構成を①の  $p$  進エタール perverse 層側で考察することにより、 $p$  進 perverse 層のコホモロジーの張り合せデータを用いた記述を得た。その応用として  $p$  進エタール perverse 層と Ddagger 加群のコホモロジーの間の比較写像を構成した。これにより、クリスタリン予想の一般化への主な困難は解決した。比較写像の構成の過程で各 stratum ( $\log$  構造付き) に伴う topos を張り合わせるある fibered topos を導入した。

(2) Higgs isocrystal のコホモロジーの基礎理論と p 進 Simpson 対応

① レベル付きの Higgs site を考え, その極限をとることにより, Poincare の補題の類似が成り立つ site を構成し, Higgs 束のコホモロジーの site を用いた解釈を与えた.

② レベル付きの Higgs isocrystal と p 進 Simpson 対応により対応する Faltings site 上のベクトル束 (一般化表現) の間のコホモロジーの比較定理を証明した.

③ p 進 Simpson 対応には A. Abbes と M. Gros による変形 torsor を用いた別のアプローチがある. 変形 torsor, Higgs isocrystal いずれのアプローチも局所的にはある周期環を用いて記述される. 変形 torsor と Higgs envelope の関係を明らかにすることにより, 二つの周期環が自然に同型であり, 従って二つのアプローチは局所的には自然に同一であることを明らかにした.

④ Faltings の局所 p 進 Simpson 対応が「小さな過収束」p 進 Higgs 束の圏から「小さな一般化表現の圏への圏同値を与えていることを示した. この結果は Faltings の原論文で主張され, 曲線の場合にその証明が書かれていたが, Abbes と Gros により証明のギャップが指摘されていた. Sen の理論の一般化と③でもふれた周期環を用いた別の手法によりこの問題を解決した. これにより有理係数の局所 p 進 Simpson 対応が完成した.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 1 件)

① L. Illusie, C. Nakayama and T. Tsuji,  
On log flat descent,  
Proceedings of the Japan Academy 89, Ser. A,  
No. 1 (2013) 1--5.

〔学会発表〕(計 6 件)

① p-adic perverse sheaves and arithmetic D-modules with singularities along a simple normal crossing divisor,  
Arithmetic Geometry week in Tokyo,  
東京大学, 2012 年 6 月 7 日

② p-adic perverse sheaves and arithmetic D-modules with singularities along a simple normal crossing divisor,  
Algebraic K-theory and Arithmetic,  
Banach Center Bedlewo, Poland,  
2012 年 7 月 25 日

③ Higgs crystals,  
Summer School: Higgs bundles on p-adic curves and representation theory,  
the University of Mainz, 2012 年 9 月 27 日

④ The p-adic Simpson correspondence and

Higgs crystals,  
p-adic cohomology and its applications to arithmetic geometry,  
東北大学, 2012 年 10 月 30 日

⑤ The p-adic Simpson correspondence and Higgs isocrystals,  
Conference Theorie de Hodge p-adique et Developpements,  
IHES, France, 2013 年 9 月 27 日

⑥ On p-adic etale cohomology of perverse sheaves,  
Pan Asian Number Theory 2014, POSTECH,  
Korea, 2014 年 8 月 7 日

〔図書〕(計 1 件)

① A. Abbes, M. Gros and T. Tsuji,  
The p-adic Simpson correspondence,  
to appear in Annals of Mathematics Studies,  
Princeton University Press.

〔産業財産権〕

出願状況 (計 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況 (計 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

#### 6. 研究組織

(1) 研究代表者

辻 雄 (TSUJI, Takeshi)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号: 40252530

(2) 研究分担者

( )

研究者番号:

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：