

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 28 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540011

研究課題名(和文) 構成的逆ガロア問題の数論

研究課題名(英文) Arithmetic of constructive inverse Galois problem

研究代表者

木田 雅成 (Kida, Masanari)

東京理科大学・理学部・教授

研究者番号：20272057

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、与えられた有限群をガロア群としてもつような多項式族で数論的乗法を豊富に含むものを構成することを目標にした。一番目の課題であった代数的トーラスに付随するクンマー拡大の数論については、低次元のトーラスの場合に具体的な計算を通じて分岐、分解法則などの考察を行い、一般化への見通しがつきつつある。またこれまで扱ってこなかったタイプのトーラスを使うことにより、新しい単純な巡回多項式族を得ることができた。これについては、論文にまとめ投稿中である。二面体群をガロア群としてもつ拡大体についても、その構成を虚数乗法との関連を念頭に研究をすすめた。

研究成果の概要(英文)：In this research we aimed at constructing families of polynomials with given finite groups as Galois group.

In particular, we were interested in families with arithmetic information such as ramification and ideal decomposition law. Our first object was Kummer extensions associated to algebraic tori. We made extensive computation on low dimensional tori case to find arithmetic information. I believe that it will soon become possible to get a generalization for certain tori of arbitrary dimensions. We obtained a new family of cyclic polynomials by using algebraic tori of norm tori. I submitted an article concerning this construction. I also made some investigation concerning dihedral extensions in the relation of complex multiplication.

研究分野：整数論

キーワード：ガロア理論 生成多項式 代数的トーラス

### 1. 研究開始当初の背景

代数体の数論はその拡大次数, ガロア群によって大きく異なることが知られている. したがって, 与えられたガロア群をもつ多項式族を構成することは, 数論における様々な実験的なアプローチを可能にする上でも, 非常に重要である. そのような多項式のうち, すべての拡大をあらわすような, 最も一般的なものは生成多項式と呼ばれるが, 一般的に, その構成は不変式論を使った代数幾何的なものであり, そこから数論的な情報を読み取るのは非常に難しい. このような状況の元で数論的な情報を取り出しやすい多項式族の構成が課題になっていた.

### 2. 研究の目的

このような背景の下, 生成多項式を数論的な情報を取り出しやすい形で再構成をしたり, 既存の生成多項式から数論的な性質を調べたりすることを本研究ではその主要な目標とした.

生成多項式の数論的再構成については, 研究代表者が以前から取り組んできた代数的トーラスを使ったクンマー理論の詳細化, 虚数乗法論を使った類体の構成などの既存の方法の再検討などが自然な形で課題になった.

また数論的な性質の検討については, 先に述べた代数的トーラスを使ったクンマー拡大の数論(分岐や相互法則)の記述や, テータ関数などの保型形式と関連した数論的性質の記述が課題とした.

### 3. 研究の方法

本研究の研究対象は古典的な有限次の代数体であるが, 実際の研究には代数幾何学, 群論, 不定方程式論, 計算数論などの背景知識が必要であった. これらの知識を得, 問題解決の手段とするため, 論文, 文献の精読を行うとともに, さまざまなセミナーや学会, 研究集会への参加, あるいは研究集会の開催を通じて知識の拡充, 問題解決の方法の探索を行った. 特に数理解析研究所で行われた研究集会「代数的整数論とその周辺」や北陸数論研究集会にはほぼ毎年参加し, 講演, 討議を通じて多くの知見を得た.

また本研究のひとつの特徴である計算数

論からのアプローチとして, 計算機と計算代数ソフトウェア Magma を活用し, 様々な実例計算を行うことにより, 一般的な現象を探るということも行った.

### 4. 研究成果

以下では本補助金による研究期間である三年間で得られた主な研究成果について述べる.

(1) 代数的トーラスに付随するクンマー理論については, 低次元のトーラスの場合に具体的な計算を通じて分岐, 分解法則などの考察を行い, 一般化への見通しがつきつつある状態である.

またこれまで扱ってこなかった相対ノルムのトーラスを使うことにより, 新しい単純な巡回多項式族を得ることができた. 特にここで得られた5次多項式はパラメータの数が最小の2であり, 非常にシンプルなものである. 今後, 様々な研究にこの多項式族が活用されることが期待される. この成果に関しては平成27年に愛知数論セミナーで研究発表を行った. また英文の論文「Algebraic extensions attached to algebraic tori of relative norm」を執筆し, 現在, 学術雑誌に投稿中である.

(2) 二面体群をガロア群にもつ代数拡大について, 虚数乗法論による構成に関連して関連論文の精読を行い, 保型形式, とくにテータ関数との関連において, いくらかの知見を得た. これに関しては残念ながら, まだ発表するだけのものになっていない. しかしながら, 九州大学の森下, 天野両氏らによるこのような拡大と Redei の triple symbol との関連を知ったことで, 今後の研究が深まっていくものと期待される.

またこれらの研究過程で(巡回拡大・二面体拡大の構成に関連することが知られている)チェビシェフ多項式の新しい漸化式を発見することができた. この漸化式については, 当時の大学院生と共同で論文を執筆し, すでに Journal of Integer Sequences に掲載されている. この話題に関してはフランスで行われた研究集会 Journées Arithmétiques で

も発表した。

(3)本研究におけるさまざまな実例計算や数値実験には計算機代数システム Magma を使っている。このシステムに関する研究集会を平成 24 年に高知大学において、何人かと共同で主催し、それを通じ計算技術の向上をすることができた。また本研究に深く関連することになった保型形式の研究集会 "Modular forms and quadratic form" (平成 25 年, 大阪大学中之島センター)においても開催に協力するとともに、充実した講演が研究の推進におおきな力を与えた。

(4) 東京理科大学において神楽坂代数セミナーを他の教員と共同で立ち上げ、研究成果の共有、ディスカッションの場を作ることができた。二年間で 15 回のセミナーを開催することができた。このセミナーに本研究に関連する研究者を招くことにより、活発な討議を行うことにより、研究を促進することができた。このセミナーの創設は新しい世代の研究意欲を高め、共同研究に参画していく体制を作っていく意味でも大きな意義があると考えている。

以上が成果の概要であるが、ある面ではこの研究の計画時に期待した成果が得られなかった部分がある。その理由を述べる。本研究代表者は平成 25 年度に電気通信大学から東京理科大学に移籍した。それにとまなう雑務、および新任先で新しい教育の準備など、新しい研究・教育環境の整備などに大きな時間を取られることになった。さらに、前の大学でのほぼ 20 年にわたる在籍中に買いそろえた文献などを移管することができなかつたのについては大きな影響があった。新たに購入できたものはよいが、絶版等により、手に入らない文献もあり、しばしば研究に支障をきたすことになった。

しかし本研究の最終年度には、研究環境も落ち着き、本報告書には出版が間に合わなかったが、本研究に関する論文も執筆することができた。本研究で培ったものを今後の研究活動につなげていきたいと思っている。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 1 件)

Masanari Kida and Yuichiro Urata:  
Involutions on generating functions,  
Journal of Integer Sequences, Vol. 16,  
29pp, (2013) 査読あり。  
<https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/vol16.html>

〔学会発表〕(計 3 件)

木田雅成: 巡回多項式族の構成とその数論, 埼玉大学談話会, 埼玉大学理学部(埼玉県・さいたま市) 2012 年 11 月 2 日

Masanari Kida: Involutions on generating functions, Journees Arithmetiques, Grenoble, France. 2013 年 7 月 2 日

木田雅成: 相対ノルムの代数的トーラスの同種写像について, 愛知数論セミナー, 愛知工業大学本山キャンパス(愛知県・名古屋市) 2015 年 1 月 31 日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
取得年月日:  
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

研究代表者のホームページ

<http://www.rs.tus.ac.jp/kida/>

には本研究に関連する論文，講演のリストなどがある．また神楽坂代数セミナーでの活動記録にもリンクがある．

## 6．研究組織

### (1)研究代表者

木田雅成 (KIDA, Masanari)

東京理科大学・理学部第一部・数学科・

教授

研究者番号：20272057

### (2)研究分担者

大野真裕 (OHNO, Masahiro)

電気通信大学・情報理工学研究科・准教

授

研究者番号：70277820

(平成24年度のみ)

### (3)連携研究者

( )

研究者番号：