

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 16 日現在

機関番号：13401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24540014

研究課題名(和文) アフィン超リー代数の表現論とその応用に関する研究

研究課題名(英文) Study on the representation theory of affine Lie superalgebras and its applications

研究代表者

古閑 義之 (Koga, Yoshiyuki)

福井大学・学術研究院工学系部門・准教授

研究者番号：20338429

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)： $sl(2,1)$ 型のアフィン超リー代数の最高ウェイト表現に関する研究を行い、以下のよう  
な成果を得た。ある一般化されたヴェーマ加群のヤンツェンフィルターの構造を解析し、その応用として既約  
最高ウェイト表現のBGG型分解を得た。またワイル亜群を用いて超リー代数上の一般化されたヴェーマ加群の構  
造を記述することを目的に、Heckenberger-YamaneとSergeev-Veselovにより導入された二つのワイル亜群の関  
連を明らかにした。

研究成果の概要(英文)：In this research, we obtain the following results on highest weight  
representations over the affine Lie superalgebra of type  $sl(2,1)$ : We study the structure of the  
Jantzen filtration of certain generalized Verma modules. As an application, we construct the BGG  
type resolutions of irreducible highest weight representations. Moreover, in order to describe the  
structure of generalized Verma modules by using the Weyl groupoid, we reveal a relation between the  
Weyl groupoids introduced by Heckenberger-Yamane and Sergeev-Veselov.

研究分野：表現論

キーワード：超リー代数 ワイル亜群

## 1. 研究開始当初の背景

アフィン超リー代数とは、ローラン多項式環で係数拡大した有限次元単純超リー代数の普遍中心拡大として与えられる(無限次元の)カツ・ムーディー超代数である。その表現は圏同値(量子ドリンフェルド・ソコロフ簡約化)を通して共形超代数(ヴィラソロ代数の超リー代数版)の表現と関連するため、数理論理学への応用面からも興味深い。またアフィン超リー代数の(指標がモジュラー不変性を持つ)既約最高ウェイト表現の指標としてモックテータ関数が現れることから注目されている。

アフィン超リー代数の表現論については、通常のアフィンリー代数の表現論や、有限次元単純超リー代数の表現論と比較すると、十分に研究が進んでいるとは言えない状況であった。実際、研究開始当初は、可積分な場合でさえも多くの既約最高ウェイト表現の指標公式の証明が未解決であった。(ただし、研究開始後、他の研究者によりアフィン超リー代数の広いクラスの最高ウェイト表現に関して指標公式が証明されるなど、いくつかの大きな進展がみられたため、本研究の研究計画を一部修正した)

共形場理論やその代数的な定式化である頂点作用素代数の理論へのアフィン超リー代数の表現論の応用を考えた場合、既約最高ウェイト表現の指標公式より精密な情報、例えば、ヴァーマ加群の極大部分加群の構造やその生成元となる特異ベクトルの具体的な表示式などが必要になる。現状では、一般のアフィン超リー代数に対して、ヴァーマ加群の極大部分加群の構造決定や特異ベクトル公式の証明を行うためには、解決すべき課題も多く、既約最高ウェイト表現の指標公式以上に、系統的な研究は進んでいない。しかし、対象とするアフィン超リー代数のランクが小さい特別なものに限定することで、本課題の研究代表者の共同研究において、関連する研究が行われている。共同研究([IK1]や[IK2])の中で、アフィン超リー代数で最も構造が簡明な  $\mathfrak{osp}(1,2)$  型アフィン超リー代数及び関連する  $N=1$  共形超代数のヴァーマ加群の構造や特異ベクトル公式を調べ、さらにその応用として、頂点作用素代数のフージョン代数の構造を明らかにした。ただし、この研究では  $\mathfrak{osp}(1,2)$  型アフィン超リー代数の構造の「特殊性」に依存した手法を用いており、この研究方法はそのまま直ちには他のアフィン超リー代数には適用することは困難である。

通常有限次元単純リー代数やアフィンリー代数のヴァーマ加群の場合、その構造は、リー代数のワイル群を用いて記述される。同様の関連が、アフィン超リー代数のヴァーマ加群とワイル群の間に確立されれば、今後のアフィン超リー代数の研究に大変有益であるが、このような関連については、有限次元単純超リー代数の場合も含めて、研究が行わ

れてはいない。これまでこのような研究が行われていない理由の一つは、超リー代数の場合にワイル群に当たる数学的な対象が、最近まで確立していなかったことが挙げられる。しかし文献[HY]と[SV]において、超リー代数の構造論と表現論の立場から超リー代数のワイル群の概念が提唱されており、これらのワイル群とヴァーマ加群の関連を明らかにすることは、今後、アフィン超リー代数の表現論を研究する上で、有益であると考えられる。

<引用文献>

[IK1] K.Iohara and Y.Koga, "Fusion algebras for  $N=1$  superconformal field theories through coinvariants I :  $\mathfrak{osp}(1|2)$ -symmetries" J. Reine Angew. Math. 531, 1-34, (2001)

[IK2] K.Iohara and Y.Koga, "Fusion algebras for  $N=1$  superconformal field theories through coinvariants II+1/2 : Ramond sector", Int. Math. Res. Notice vol .2009, no.13, 2374-2416 (2009)

[HY] I.Heckenberger and H. Yamane, "A generalization of Coxeter groups, root systems and Matsumoto's theorem", Math Z 2 259, no.2, 255-276 (2008)

[SV] A.N.Sergeev and A.P.Veselov, "Grothendieck rings of basic classical Lie superalgebras", Ann. of Math.(2) 173, no.2,663-703 (2011)

## 2. 研究の目的

本研究では、上記の引用文献([IK1])での手法の一部を適用できるような対象とするアフィン超リー代数をランクが2のものに制限する。具体的には、 $\mathfrak{osp}(1,2)$  型アフィン超リー代数の次に構造の簡明な  $\mathfrak{sl}(2,1)$  型のアフィン超リー代数の場合を中心に、その最高ウェイト表現、特にヴァーマ型加群の構造と関連する研究を行う。対象をランクの小さなアフィン超リー代数に制限することで、具体的な計算が可能となり、このような具体的計算例の積み重ねを通して、今後一般のアフィン超リー代数の研究を進めていく上での指針を得られると期待される。

本課題研究で対象とする  $\mathfrak{sl}(2,1)$  型アフィン超リー代数は研究背景欄で述べた圏同値により  $N=2$  の共形超代数と関係する。更に最近の研究結果であるが、 $N=2$  共形超代数と  $\mathfrak{sl}(2)$  型アフィンリー代数のある表現の圏の間の圏同値が確立された(文献[SI])。この圏同値を通して、 $\mathfrak{sl}(2,1)$  型アフィン超リー代数の表現と  $\mathfrak{sl}(2)$  型アフィンリー代数の表現が関連する。このように  $\mathfrak{sl}(2,1)$  型アフィン超リー代数は、アフィン超リー代数の中で、ランクが小さく扱いやすい対象というだけでなく、他の無限次元(超)リー代数の表現とも関連する興味深い対象である。

また、上記の研究背景欄で述べたヴァーマ型加群の構造と超リー代数ワイル群との

関連を、一般の場合に確立するための準備段階として、得られたヴァーマ型加群の構造と  $sl(2,1)$  型のアフィン超リー代数のワイル亜群の比較を行う。

更に、ヴァーマ型加群の構造、特に極大部分加群の生成元を与える特異ベクトルの具体形は、頂点作用素代数などの数理物理学への応用が考えられる。そのような応用も視野に、特異ベクトル公式など、最高ウェイト表現の指標公式さらに詳しい情報を得ることも目的の一つと言える。

<引用文献>

[S] R. Sato, "Equivalence between weight modules via  $N=2$  coset constructions" preprint

### 3. 研究の方法

$sl(2,1)$  型アフィン超リー代数はベキ零元を含み、[IK1]で取り扱った  $osp(1,2)$  型アフィン超リー代数の場合にはなかった技術的な困難がある。その困難を解消するため、本研究ではヴァーマ加群に替えて文献[ST]で導入されたある一般化されたヴァーマ加群([ST]では、狭ヴァーマ加群と呼ばれている)に注目する。より具体的には、最初に狭ヴァーマ加群のヤンツェンフィルターの構造を決定する。ヤンツェンフィルターとは、加群上の不変形式の退化の度合いにより定まるフィルターで、これにより狭ヴァーマ加群の極大部分加群の構造が明らかとなる。ここでは、エンライト関手による狭ヴァーマ加群の像を決定し、その結果と[IK1]で用いたランク2の(超)リー代数のヴァーマ加群の構造を解析する方法を組み合わせることで、ヤンツェンフィルターの構造が得られる。次に狭ヴァーマ加群の特異ベクトル公式を導出する。文献[ST]によれば(少なくともこの文献で考察されている)狭ヴァーマ加群の特異ベクトルは、通常のリー代数の特異ベクトル公式と類似の公式が成り立つ。この公式に数学的な証明を与える。そのためにここでもエンライト関手を用いる。

続いて、得られた狭ヴァーマ加群の構造を[HY]や[SV]のワイル亜群と比較する。これら二つのワイル亜群いずれも、有限次元単純超リー代数と関連する場合しか考察されていないため、そのアフィン版を導入した上で、狭ヴァーマ加群の構造との比較を行う。

<引用文献>

[ST] A.M. Semikhatov and A. Taormina, "Twists and singular vectors in  $sl(2|1)^{\wedge}$  representations", Teore. Math. Phys.128, no.3, 1236-1251 (2001)

### 4. 研究成果

24年度は、ヴァーマ型加群の構造を調べるために有用だと期待されるエンライト関手に関する研究を行った。具体的には、前年度までに得られていた単純ルートに付随するエンライト関手の性質(エンライト関手

によるヴァーマ加群の像の決定)が、主ルートと呼ばれるルートの場合に成り立つかを調べた。その結果は、最高ウェイトが典型的というある一般性条件のもとでは同様の結果が成り立つというものである。この研究は、前年度までの研究成果とあわせてリヨン大学の庵原氏との共同研究として発表した。

25年度から27年度は主に  $sl(2,1)$  型アフィン超リー代数の狭ヴァーマ加群の構造に関する研究を行った。具体的には

(1) エンライト関手による狭ヴァーマ加群の像の決定

(2) エンライト関手を用いた狭ヴァーマ加群の間の準同型の構成と分類

(3) 狭いヴァーマ加群のシャポヴァロフ行列式公式の導出などを行い、その結果として、狭ヴァーマ加群のヤンツェンフィルターの構造を決定した。なおこの部分の研究には、数式処理ソフトを用いて  $sl(2,1)$  型アフィン超リー代数の交換関係を取り扱うプログラムを作成し、シャポヴァロフ行列式公式の予想などのためにそれを用いた。

更に文献[SV]において与えられていた狭ヴァーマ加群の特異ベクトル公式に数学的な証明を与えた。しかしながら本研究実施中に、アフィン超リー代数の指標公式に関して(他の研究者らによる)大きな進展があり、本研究の研究結果の一部も含まれていたため、この部分の研究結果の一部を改良して論文を準備中で、まだ発表には至っていない。

平成28年度は、主にワイル亜群に関する研究を行った。文献[HY]と[SV]で導入された2つのワイル亜群はそれぞれ構造論と表現論の2つの立場から提案されたもので、その関連は本研究開始時点では明らかになっていなかった。更に、[HY]のワイル亜群は生成元と関係式を用いて定義されているが、[SV]のワイル亜群はある亜群とワイル群の半直積として定義されているため、自然な生成元と関係式は与えられていない。そこで最初に[HY]と[SV]のワイル亜群の比較を行い、その関係を明らかにした。結果として[SV]のワイル亜群の生成元と関係式が明らかになった。なおこの部分の研究にも、数式処理ソフトを用いてワイル亜群の計算プログラムを作成し、二つのワイル亜群の比較に用いた。ワイル亜群と狭ヴァーマ加群の構造の関係については、[SV]のワイル亜群のアフィン版を導入し、 $sl(2,1)$  型の場合に狭ヴァーマ加群の構造と比較する予定であるが、現時点では研究を進行中である。平成28年度の研究の一部は福井大学大学院生の三宅琢斗氏との共同研究であり、現在論文を準備中である。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計1件)

K.Iohara and Y.Koga "Enright

functors for Kac-Moody  
superalgebras” Abh. Math. Semin.  
Univ. Hambg., 82, no.8, 205-226  
(2012) 査読あり

〔学会発表〕(計3件)

古閑義之「アフィン超リー代数  $sl(2,1)^\wedge$   
の BGG 型 resolution について」研究集  
会「量子群と代数群の表現論」2014 年  
6 月富山勤労総合福祉センター

古閑義之「アフィン超リー代数  $sl(2,1)^\wedge$   
のある一般化された Verma 加群の構  
造」研究集会「Meeting for study of  
number theory, Hopf algebras and  
related topics」2017 年 2 月富山大学

Y. Koga「On BGG type resolutions for  
the affine Lie superalgebra  $sl(2,1)^\wedge$ 」  
研究集会「VOA and related topics」  
2017 年 3 月大阪大学

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

古閑 義之 (KOGA, Yoshiyuki)

福井大学・学術研究院工学系部門・准教授

研究者番号：20338429