

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 9 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540016

研究課題名(和文) 双曲的代数曲線の幾何学的性質とその数論的基本群の群論的性質の関連の研究

研究課題名(英文) Relationship between the geometric properties of hyperbolic algebraic curves and the group-theoretic properties of the arithmetic fundamental groups of curves

研究代表者

星 裕一郎 (Hoshi, Yuichiro)

京都大学・数理解析研究所・講師

研究者番号：50456761

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：(1)劣 p 進体上の多重双曲的曲線、 p 進局所体、Kummer忠実体上の双曲的曲線、という3つの数論幾何学的対象に対するGrothendieck予想型の成果を得た。(2)望月新一氏との共同研究により、組み合わせ論的遠アーベル幾何学を発展させた。(3)双曲的曲線に付随する外Galois表現の核や像の研究を行い、数体上の一点抜き楕円曲線の上の穏やかな有理点の有限性を証明した。(4)合同部分群問題の副 p 版に関する共同研究を飯島優氏と行った。(5) p 進Teichmüller理論における重要な対象である冪零許容固有束、冪零通常固有束の標数が3の場合の研究を行った。(6)数体の単遠アーベル幾何学を発展させた。

研究成果の概要(英文)：(1) I obtained Grothendieck conjecture-type results for hyperbolic polycurves over sub- p -adic fields, p -adic local fields, and hyperbolic curves over Kummer-faithful fields. (2) By a joint work with Shinichi Mochizuki, we developed combinatorial anabelian geometry. (3) I studied the kernels and images of the outer Galois actions associated to hyperbolic curves and proved the finiteness of the moderate rational points of a hyperbolic curve over a number field. (4) As a joint work with Yu Iijima, we studied a pro- p version of the congruence subgroup problem. (5) I studied nilpotent admissible indigenous bundles, as well as nilpotent ordinary indigenous bundles, which is a central object in p -adic Teichmüller theory, in characteristic three. (6) I developed mono-anabelian geometry for number fields.

研究分野：数物系科学

 キーワード：遠アーベル幾何学 組み合わせ論的遠アーベル幾何学 多重双曲的曲線 Hodge-Tate性 穏やかな点
 合同部分群問題 p 進Teichmüller理論 単遠アーベル幾何学

1. 研究開始当初の背景

(1) Grothendieck 予想は遠アーベル幾何学における中心的なテーマであり、これまでに双曲的曲線やそれに付随するいくつかの代数多様体に対する Grothendieck 予想が解決されてきた。一方、そのクラスは限定されており、例えば、Grothendieck 氏自身が遠アーベル幾何学を提唱した当初から「遠アーベル幾何学適用可能代数多様体」の候補に挙げていた「多重双曲的曲線」に対する Grothendieck 予想は、その次元が 2 以下の場合には望月新一氏によって解決されていたが、その次元が 3 以上の場合には、ほとんどまったく研究されていなかった。(2) 組み合わせ論的遠アーベル幾何学は、望月新一氏と星によって展開された理論である。本研究を開始する段階で、ノード非退化な外表現に対する Grothendieck 予想型の結果が得られおり、その帰結として、当初の目標の一つであった数体上の双曲的曲線に付随する外 Galois 表現の忠実性が証明されていた。また、その後、副有限 Dehn 捻りの理論、円分同期化の理論などといった理論が発展して、そういった理論の応用として、曲線のモジュライ空間上の普遍曲線に対する幾何学版 Grothendieck 予想が解決されていた。(3) 数体上の双曲的曲線の「穏やかな点」という概念は、伊原康隆氏が提出したある問題への考察の際に、松本眞氏によって導入された概念である。本研究を開始する以前に、星は、それまで「実例」の存在が確認されていなかった穏やかな点の例を構成して、また、その諸性質の研究を行っていた。そして、その研究の中で、この穏やかな点という概念が、「アーベル多様体の当分点」の双曲的曲線に対する類似的概念であるという観察を得た。(4) 合同部分群問題そのものの研究は、朝田衛氏によって種数が 0 と 1 の場合に、Boggi 氏によって種数が 2 の場合に解決されていた。一方、遠アーベル幾何学ではしばしば考察の対象となる「(ある問題の) 副 p 版」は、合同部分群問題の場合には考察されていないようであった。(5) p 進 Teichmüller 理論は、今から 20 年ほど前に望月新一氏によってその基礎が築き上げられた。この理論の内、「休眠固有束」という特殊な固有束に関わる研究は、正標数の代数曲線上のベクトル束の研究と関連付けられて、比較的盛んに行われてきた。しかしながら、そもそもの p 進 Teichmüller 理論の主役の一つである「冪零通常固有束」という概念に関わる研究は、これまでの 20 年の間に、創始者のそれを除けば、ほとんどまったく行われてこなかった。(6) 30 年以上前に、数体に対する遠アーベル幾何学的結果として、いわゆる「Neukirch・内田の定理」という定理が証明された。しかしながら、これは数体に対する「双遠アーベル幾何学」であり、数体に対

する単遠アーベル幾何学の研究はまったく行われていなかった。一方、数体ではなく関数体の場合には、内田興二氏によってその単遠アーベル幾何学が研究されており、しかも、玉川安騎男氏、望月新一氏などによって更なる研究が行われ、本研究開始の時点までに既に非自明な発展が与えられていた。

2. 研究の目的

(1) それまでほとんど研究が行われてこなかった「高次元多重双曲的曲線の遠アーベル幾何学」の研究として、そのような代数多様体に対する Grothendieck 予想型の何らかの結果を証明することを本研究の目的とした。また、1 次元の場合、つまり、双曲的曲線の場合にも、Grothendieck 予想が解決可能なその基礎体の範囲を広げることを目的とした。(2) それまでの組み合わせ論的遠アーベル幾何学の発展の自然な延長線上にある研究である、三点基の同期化の理論や局所的 Grothendieck・Teichmüller 群の理論の研究をその主要な目的とした。(3) 上述のとおり、「穏やかな点」という概念が「アーベル多様体の当分点」という概念の双曲的曲線に対する類似であるという観察は既に得ていた。そこで、この類似を更に追求するために、与えられた双曲的曲線に対して、その曲線に付随する外 Galois 表現の核に対応する拡大体と曲線のすべての穏やかな点の座標が生成する拡大体とを比較してみようと考えた。また、古典的な Mordell・Weil の定理の帰結である「数体上のアーベル多様体の捻れ有理等分点の有限性」の双曲的曲線に対する類似的結果の証明を試みようと考えた。(4) 合同部分群問題の副 p 版の適切な定式化を与えて、それに対して非自明な結果を得ることを主要な目的とした。(5) その定義は当然明確に与えられていたが、これまでまったく研究が行われてこなかったためにその正体を掴むことができなかった「冪零通常固有束」という概念が、一体どのような概念であるか、それを明らかにすることを本研究の主要な目的とした。(6) 数体の単遠アーベル的復元の実行を本研究の主要な目的とした。

3. 研究の方法

(1) それまでに証明が与えられていた「次元以下が 2 以下の多重双曲的曲線に対する Grothendieck 予想の解決」にヒントを得た議論を展開することで、より次元の高い多重双曲的曲線に対する Grothendieck 予想を解決しようと試みた。(2) これまでに既に得られていた組み合わせ論的遠アーベル幾何学の議論を適切に適用することで、その後の理論の研究を行った。(3) 双曲的曲線の穏やかな点は、その定義から、外 Galois 表現の像に関する考察を行うことによってそ

の深い理解が得られる概念である。外 Galois 表現の像、特にその中心を、望月新一氏による双曲的曲線に対する Grothendieck 予想の解決によって評価することで、穏やかな有理点の有限性を証明しようと試みた。(4) 双曲的曲線やそのモジュライ空間に付随する外 Galois 表現の古典的な研究から、合同部分群問題の副 p 版を理解するためには、「適当なモジュラー曲線に付随する外 Galois 表現の像が副 p となるか」という問題と向き合わなければならないことが明らかとなった。そのため、この問題を出発点として、本研究を行った。(5) 標数が 3 の場合には、それぞれの曲線が休眠固有束をただ一つしか有さないことがわかる。これにより、標数が 3 の場合には、 p 進 Teichmüller 理論に登場する様々な「抽象的な概念」の「具体的な記述」が可能であることが明らかとなる。この観察を出発点として、そういった様々な抽象的概念、特に、冪零通常固有束を具体的に理解する研究を行った。(6) 上述のとおり、関数体の場合にはその単遠アーベル的復元は古典的な事実であったため、それをどこまで真似することができるか、という観点を追求することで、数体の単遠アーベル幾何学の研究を行うこととした。

4. 研究成果

(1) 劣 p 進体上の次元が 4 以下の多重双曲的曲線、 p 進局所体、Kummer 忠実体上のアフィン双曲的曲線、という 3 つの数論幾何学的対象に対する Grothendieck 予想型の成果を得た。(2) 望月新一氏との共同研究により、組み合わせ論的遠アーベル幾何学を発展させた。より具体的には、例えば、三点基の同期化の理論の研究、組み合わせ論的カスプ化の貼り合わせ理論の研究、局所的 Grothendieck・Teichmüller 群の研究、などといった研究を行い、組み合わせ論的遠アーベル幾何学の内容を充実させた。(3) 双曲的曲線に付随する外 Galois 表現の核や像の研究を行い、数体上の一点抜き楕円曲線の上の穏やかな有理点の有限性を証明した。(4) 合同部分群問題の副 p 版に関する共同研究を飯島優氏と行い、 p が 2 の場合にはその問題を肯定的に、 p が 11 以上の場合にはその問題を否定的に解決した。(5) p 進 Teichmüller 理論における重要な対象である冪零許容固有束や冪零通常固有束を、設定の標数が 3 の場合に研究した。特に、標数が 3 の場合における冪零許容固有束、冪零通常固有束を Cartier 作用素を通じて具体的に理解することに成功した。そして、その帰結として、 p 進 Teichmüller 理論のある基本問題の否定的解決、及び、部分的肯定的解決を得た。(6) 数体に対する単遠アーベル的復元アルゴリズムの記述に成功した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 7 件)

1: Yuichiro Hoshi, Nilpotent admissible indigenous bundles via Cartier operators in characteristic three, Kodai Math. J., 査読有, 掲載決定.

2: Yuichiro Hoshi, Finiteness of moderate rational points of once-punctured elliptic curves, Hokkaido Math. J., 査読有, 掲載決定.

3: Yuichiro Hoshi, On the kernels of the pro- l outer Galois representations associated to hyperbolic curves over number fields, Osaka. J. Math., 査読有, 掲載決定.

4: Yuichiro Hoshi, The Grothendieck conjecture for hyperbolic polycurves of lower dimension, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 査読有, 21, 2014, 153-219.

5: Yuichiro Hoshi, On the field-theoreticity of homomorphisms between the multiplicative groups of number fields, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 査読有, 50, 2014, 269-285, DOI: 10.4171/PRIMS/133.

6: Yuichiro Hoshi, A note on the geometricity of open homomorphisms between the absolute Galois groups of p -adic local fields, Kodai Math. J., 査読有, 36, 2013, 284-298, DOI: 10.2996/kmj/1372337519.

7: Yuichiro Hoshi, On a problem of Matsumoto and Tamagawa concerning monodromic fullness of hyperbolic curves: Genus zero case, Tohoku math. J., 査読有, 65, 2013, 231-242, DOI: 10.2748/tmj/1372182723.

〔学会発表〕(計 9 件)

1: 星裕一郎, 数体の単遠アーベル的復元, 宇宙際タイヒミュラー理論の検証と更なる発展, 2015.3.9, 京都大学数理解析研究所 (京都府・京都市).

2: 星裕一郎, Reconstruction of a number field from the absolute Galois group, 第 18 回早稲田大学整数論研究集会, 2014.3.11, 早稲田大学 (東京都・新宿区).

3: 星裕一郎, Moderate points of

様式 C - 19、F - 19、Z - 19 (共通)

hyperbolic curves, Fundamental groups in arithmetic and algebraic geometry, 2013.12.19, Ennio De Giorgi Mathematical Research Center (ピサ(イタリア)).

4: 星裕一郎, 低次元多重双曲曲線に対する Grothendieck 予想, Okayama Anabel Days, 2013.5.23, 岡山大学(岡山県・岡山市).

5: 星裕一郎, Grothendieck-Teichmuller groups in the combinatorial anabelian geometry, Grothendieck-Teichmuller theory and multiple zeta values, 2013.4.12, Issac Newton Institute for Mathematical Sciences (ケンブリッジ(イギリス)).

6: 星裕一郎, 遠アーベル幾何学概論, 第10回城崎新人セミナー, 2012.2.21, 兵庫県豊岡市城崎市民センター(兵庫県・豊岡市).

7: 星裕一郎, 双曲的代数的リーマン面の配置空間の基本群の間の同型射について, 代数幾何とその周辺, 2012.8.6, 北海道大学(北海道・札幌市).

8: 星裕一郎, Conditional results on the birational section conjecture over small number fields, Galois covers and deformations, 2012.6.28, Universite de Bordeaux 1 (ボルドー(フランス)).

9: 星裕一郎, On the Grothendieck conjecture for hyperbolic polycurves, 数論幾何とその周辺, 2012.4.9, 京都大学(京都府・京都市).

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~yuichiro/>

6. 研究組織
(1) 研究代表者
星 裕一郎 (HOSHI YUICHIRO)
京都大学・数理解析研究所・講師
研究者番号: 50456761

(2) 研究分担者
()

研究者番号:

(3) 連携研究者
()

研究者番号: