

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 4 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540018

研究課題名(和文) ガロア表現の変形空間の幾何、 $p$ 進ホッジ理論とラングランズ双対性研究課題名(英文) Geometry of deformation spaces of Galois representations,  $p$ -adic Hodge theory and Langlands duality

研究代表者

安田 正大 (Yasuda, Seidai)

大阪大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：90346065

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：研究代表者の得た成果のうち顕著なものは次の3つである。山下剛氏と共同で、(1)  $\mathbb{Q}_p$  の 2次元クリスタリン表現の法  $p$  還元計算を、ホッジ・テイト重さの差が  $(p-1)/2$  以下の場合に、わずかな例外を除いて完成させ、(2)  $p$  進体上の開多様体のコホモロジーの比較定理の詳細を検討し、証明に必要な道具立てを整備した。(3) 広瀬稔氏、赤木和真氏と共同で、対数的クリスタリンコホモロジーを用いて重さ  $k$  の  $p$  進多重ゼータ値が、 $k$  次の分母つき巾イデアルに属することを示し、有限多重ゼータ値のなす  $\mathbb{Q}$  代数の構造についての金子・Zagier の予想の部分的解決を得た。

研究成果の概要(英文)：The main researcher of this project and Go Yamashita computed the reductions modulo  $p$  of two dimensional crystalline representations except for a small number of exceptions when the difference of Hodge-Tate weights are less than or equal to  $(p-1)/2$ , and investigate a proof of comparison theorem of cohomologies of open varieties over  $p$ -adic fields and prepare fundamental tools to complete the proof. He, Kazuma Akagi, and Minoru Hirose proved that the  $p$ -adic multiple zeta values of weight  $k$  belongs to the  $k$ -th PD-ideal of  $p\mathbb{Z}_p$ , and using this, gave an upper bound of the dimension of the  $\mathbb{Q}$ -vector space of finite multiple zeta values introduced by Kaneko and Zagier.

研究分野：整数論

キーワード：ガロア表現  $p$  進 Hodge 理論 多重ゼータ値

### 1. 研究開始当初の背景

保型性持ち上げとは、保型表現に伴う大域体の法  $p$  Galois 表現を  $p$  進表現に持ち上げたものが保型的になる、という主張であり、Galois 表現と保型表現との間の対応を主張する Langlands 双対性の、表現の係数に関する一般化である。保型性持ち上げは、Wiles が Fermat の最終定理の証明に用いたことが契機となり研究が進み、Taylor, Kisin らによって手法が改良された結果、現在ではかなり使いやすい主張が得られている(例えば研究計画欄の[BGGT])。応用として、谷山志村予想の完全解決、Serre 予想の解決、佐藤-Tate 予想の解決など華々しい成果が得られている。

保型性持ち上げ定理について、申請者は2008年3月、山下剛氏(現・豊田中央研究所)と合宿を主催し、保型性持ち上げ定理とその応用に関する計12時間の講演を行い成功をおさめた(研究業績の25)を参照。その後山下剛氏とともに、保型性持ち上げに関する研究を行い(研究計画欄の[YY]等)現在も継続中である。申請者はこれらの経験を通じて、 $p$  進 Hodge 理論を整備する必要性を認識するに至った。保型性持ち上げは大域体の Galois 表現に関する主張であるが、応用の際に最大の障壁となるのが、 $p$  進体の法  $p$  Galois 表現の変形空間(以下ではこの空間を  $p$  進局所変形空間と呼ぶ)の構造が、現時点では十分把握できていないという点にある。この  $p$  進局所変形空間の研究は、整係数  $p$  進 Hodge 理論とよばれる理論を用いてなされる。そこでこの理論を強化し、それを用いて  $p$  進局所変形空間の理解を完全にし、保型性持ち上げ定理をより強力なものにする、という目標が本研究の背景にある。

### 2. 研究の目的

保型性持ち上げへの応用を念頭におき、 $p$  進 Hodge 理論および Langlands 双対性について、基礎理論の構築を多面的に行うことが本研究の目的であった。具体的には次の3点に焦点を当てた研究を行い、成果をあげることが目標とした。

- (1) 整係数  $p$  進 Hodge 理論を幾何的視点から再解釈し、それを  $p$  進局所変形空間の環論的・幾何的性質の研究に応用する。
- (2) 数論的多様体の  $p$  進コホモロジーに関する導来代数幾何的研究
- (3)  $p$  進局所 Langlands 対応の確立

### 3. 研究の方法

- (1) 整係数  $p$  進 Hodge 理論は、 $p$  進体の整係数 Galois 表現を理解するための理論である。整係数  $p$  進 Hodge 理論は代数曲面上の同変ベクトル束の局所理論に類似している。そこで代数曲面上のベクトル束の理論におけるアイデアを積極的に導入することによって、整係数  $p$  進 Hodge 理論を幾何的な視点から整備し、

保型性持ち上げへの応用に役立てる。この方面で最も重要かつ基本的な問題は、de Rham 表現の法  $p$  還元の記事およびそれを用いた  $p$  進局所変形空間の既約成分の決定である。本研究では、 $Q_p$  の2次元クリスタリン表現の法  $p$  還元の計算結果に幾何的な立場から解釈を与え、その解釈を用いて  $Q_p$  の不分岐拡大の一般次元クリスタリン表現に対して、その法  $p$  還元の記述および関連する  $p$  進局所変形空間の既約成分の決定を行うことを目的とする。

- (2) 近年 Fargues と Fontaine により、整係数でない  $p$  進表現の理論について幾何的解釈が与えられ、代数曲線上の大域的ベクトル束の理論との類似性が明確になった。本研究では研究目的(1)のためにこの解釈をさらに推進する予定であるが、得られた技術をさらに  $p$  進体上の多様体の  $p$  進コホモロジーの理論に応用する。[FF] による解釈は、付加構造つきツイスター構造としての通常の Hodge 構造の解釈に類似している。ツイスター構造の理論は、Sabbah, 望月拓郎氏によって近年大きな発展をとげた。 $p$  進 Hodge 理論においても、[FF] の理論が  $p$  進体上の多様体上の係数つき理論へと発展し、有用な応用を持つことが期待される。この期待の実現を目指し、基礎的かつ先駆的な研究を行うことを本研究の目的とする。
- (3)  $p$  進 Hodge 理論は、 $p$  進表現を曲線または曲面上のベクトル束の局所理論の類似と捉えるが、一方[FF] の整係数でない理論では(双対的な空間の上の)大域的なベクトル束と捉える。ここに局所から大域への移行のプロセスが隠れていると申請者は見る。局所 Langlands 対応においては、本来ベクトル束の局所理論である整係数  $p$  進 Hodge 理論を少し大域的に延ばし、さらに貼りあわせを行って射影直線上の層を構成し、射影直線への  $GL(2)$  作用から  $GL(2, Q_p)$  表現を得る、という方法で、跡公式等を通じてではなく直接的に Langlands 対応が作られる。この  $GL(2, Q_p)$  に関する対応の構成における射影直線を、より一般の等質空間に置き換えて考察することにより、 $Q_p$  上の分裂簡約代数群に対する  $p$  進局所 Langlands 対応について予想を定式化し、群が  $GL(n, Q_p)$  の場合に対応を可能な限り確立することを本研究の目的とする。

### 4. 研究成果

本来の研究目的については、期待したような成果は余り得られなかったが、当初想定していなかった方向に研究が進展し、次のような成果が得られた。

研究代表者の安田は次の研究を行った山下

剛氏（豊田中研）と共同で、 $p$  進数体の 2 次元クリスタリン表現の法  $p$  還元計算を、ホッジ・テイト重さの差が  $(p-1)/2$  の場合に行い、わずかな例外を除いて法  $p$  還元の記述を完成させた。

研究代表者の安田は山下剛氏と共同で、 $p$  進体上の開多様体のコホモロジーの比較定理の詳細を検討した。証明の詳細を書き上げるためには、対数的スキーム上の相対正規交叉因子や、フロベニウス持ち上げと因子のデータが付随した埋め込み系などについて、いくつか道具立てを用意する必要があり、それらの整備を行った。

研究代表者の安田は、古庄氏の定義した  $p$  進多重ゼータ値を計算するアルゴリズムを考案し、そのアルゴリズムに基づいてコンピュータで数値計算を行った。その結果、 $p$  進多重ゼータ値と有限多重ゼータ値の間を結びつける予想に到達した。さらに広瀬稔氏、赤木和真氏と共同で、対数的クリスタリンコホモロジーを用いて  $p$  進多重ゼータ値が  $p$  進整数であること、より強く、重さ  $k$  の  $p$  進多重ゼータ値が、 $k$  次の分母つき巾イデアルに属することを示した。このこと、安田および広瀬が予想し D. Jarossay が証明した Deligne の  $p$  進多重ゼータ値のみたす関係式とを合わせ、上記の予想を証明し、有限多重ゼータ値のなす  $Q$  代数の構造についての金子・Zagier による予想の部分的解決を得た。

研究代表者の安田と研究分担者の近藤は、 $p$  進体あるいは有限アデール上の  $GL_d$  の表現について、以前確立していた層の理論を用いた定式化を見直し、サイトの理論を用いたより根源的な定式化を得、grid という概念を導入することにより、ある種のガロア理論を完成させた。これは Grothendieck のガロア圏および smooth 表現からくるトポスを含むトポスについて適用可能であり、また Joyal・Tierney の理論のような一般性はないが具体的な応用に適している。

研究代表者の安田は、中村健太郎氏との研究打ち合わせを通じて  $p$  進表現の理論の最新の状況についての理解を深め、また  $p$  進予想の具体的な表示に関する予想に到達した。位相的保型形式に関する研究集会を 2012 年度に主催し、無限圏に関する基礎技術の習得に努めた。

研究分担者の田口は次の研究を行った：(1) 局所体上のアーベル多様体の、大きい拡大体上の有理的捻じれ点の有限性についての「今井の定理」を  $p$  進 Hodge 理論的手法で一般化し、岩澤理論に応用した。(2) 代数体の 1 進表現について「法 1 で合同なら、ある素点で局所的に同型か？」という問題を考察し、Rasmussen-玉川予想の「半安定の場合」に応用した。(3) 固有保型形式のヘッケ体が一つのフーリエ係数  $a_p$  で生成される様な素数  $p$  の密度が、適当な条件の下 1 になる事が知られているが、これをガロア表現の言葉

で一般化する研究を行った。

研究分担者の田口は小関祥康氏と共同で、代数体の 2 つの幾何的な 1 進ガロア表現が法 1 で合同なとき、それらは局所的には元々同型か、という問題を研究し、適当な条件のもとにこの種の命題を証明した。

研究分担者の田口は、Dohoon Choi 氏と共同で、保型表現からくる Galois 表現の Hecke 体が、 $Q$  上ひとつの Hecke 固有値で  $a_p$  で生成されるような素数  $p$  の密度について研究した。

研究分担者の平之内は、主に代数群に付随するミルナー型  $K$  群を対象に研究を行った。更に特別な代数群をとったときのケーラー微分加群やミルナー  $K$  群、及び加法的チャウ群との関係を調べることができた。また完全体上の曲線の積に対する一般アルバネーゼ多様体との関係や（分岐を許した）高次元類体論への応用についても研究した。さらに正標数局所体上の曲線の類体論について研究し、相互写像の核がイデール類群の最大加除部分群になることがわかった。

#### 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 9 件)

1. Go Yamashita, Seidai Yasuda, On some applications of integral  $p$ -adic Hodge theory to Galois representations, *J. Number theory*, 査読有, 147, 2015, 721-748, DOI: 10.1016/j.jnt.2014.07.026
2. 安田 正大, 多重ゼータ値の Hoffman 基底, *RIMS Kokyuroku Bessatu*, 査読有, B51, 2014, 375-433
3. Fabien Trihan, Seidai Yasuda, The  $l$ -parity conjecture for abelian varieties over function fields of characteristic  $p > 0$ , *Compositio Math.*, 査読有, 150, 2014, 507-522, DOI:10.1112/S0010437X13007501
4. Masataka Chida, Satoshi Kondo, Takuya Yamauchi, On the rational  $K_2$  of a curve over a global field of positive characteristic, *Journal of K-theory: K-theory and its Applications to Algebra, Geometry, and Topology*, 査読有, 14, Issue 02, 2014, 313-342, DOI:10.1017/is014006024jkt272
5. Yoshiyasu Ozeki, Yuichiro Taguchi, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 査読有, 50, 2014, 287-306,

DOI:10.4171/PRIMS/134

6. Satoshi Kondo, Seidai Yasuda, The Riemann-Roch theorem without denominators in motivic homotopy theory, J. Pure Appl. Algebra, 査読有, 218, 2014, 1478-1495, DOI: 10.1016/j.jpaa.2013.12.001
7. Seidai Yasuda, Explicit t-expansions for the elliptic curve  $y^2=4(x^3+Ax+B)$ , Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci, 査読有, 89, 2013, 103-127, DOI: 10.3792/pjaa.89.123
8. Yusuke Kubo, Yuichiro Taguchi, A generalization of a theorem of Imai and its application to Iwasawa theory, Math. Z., 査読有, 275, 2013, 1181-1195, DOI: 10.1007/s00209-013-1176-3
9. Luc Illusie, Chikara Nakayama, Takeshi Tsuji, On log flat descent, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 査読有, 89, 2013, 1-5, DOI: 10.3792/pjaa.89.1

[学会発表](計 32 件)

1. 平之内 俊郎, Class field theory for curves over local fields, 第2回岡山-広島代数学シンポジウム, 2015年03月27日, 広島大学(広島県・東広島市)
2. Seidai Yasuda, Outlines: Kisin's proof of Breuil-Mezard conjecture, Winter school of p-adic Hodge theory, 2015年01月15, 16日, KIAS (韓国)
3. Satoshi Kondo, On curves of genus 1 or 2 over function fields with large rational  $K_2$  group, Zeta function 5, 2014年12月03日, Independent University of Moscow(ロシア)
4. Seidai Yasuda, Integrality and a conjectural relation between p-adic multizeta values and truncated multiple harmonic sums, Novel visage of arithmetic and derived geometry, 2014年10月10日, 中央大学(東京都・文京区)
5. Seidai Yasuda, p-adic multiple zeta values and truncated multiple harmonic sums, Workshop on Multiple Zeta Values, 2014年08月22日, 九州大学(福岡県・福岡市)
6. Takeshi Tsuji, p-adic etale cohomology

of perverse sheaves, Pan Asian Number Theory 2014, 2014年08月07日, POSTECH(韓国)

7. Seidai Yasuda, Periods of Mixed Tate Motives and Multiple Zeta Values, 2014 NCTS Lecture Series on Number Theory, 2014年05月02,05,06,07日, National Tsing Hua University(台湾)
8. 平之内 俊郎, Barwick's K-theory of higher categories, Workshop on noncommutative motives and derived algebraic geometry, 2014年02月25日, 中央大学(東京都・文京区)
9. 安田 正大, 有限実多重ゼータ値と p 進多重ゼータ値, 第20回関西多重ゼータ研究会 & 第7回多重ゼータ研究集会, 2014年02月23日, 九州大学伊都キャンパス(福岡県・福岡市)
10. Satoshi Kondo, On Collino's cycles over a nonarchimedean local field: a genus two example, East Asian Number Theory Conference 2014, 2014年01月23日, 西新プラザ(福岡県・福岡市)
11. Takeshi Tsuji, The p-adic Simpson correspondence and Higgs isocrystals, Theorie de Hodge p-adique et Developpements, 2013年09月27日, IHES(フランス)
12. 近藤 智, セグメントによる  $GL_n(F)$  の既約表現の構成, 2013年度整数論サマースクール, 2013年09月03日, 箱根高原ホテル(神奈川県・箱根町)
13. 田口 雄一郎, 函数体に於ける周期について, 代数学シンポジウム, 2013年08月29日, 広島大学(広島県・東広島市)
14. 近藤 智, セグメントによる  $GL_n(F)$  の既約表現の構成, p 進代数群の表現論翔研究集会, 2013年07月28日, 東京大学数理科学研究科(東京都・目黒区)
15. 平之内 俊郎, Computations of K-groups of reciprocity functors, Workshop on reciprocity sheaves, 2013年07月13日, Yatsugatake Natural and Culture Park (長野県・原村)
16. 近藤 智, Segments による各種表現の構成, p 進代数群の調和解析 小研究集会, 2013年03月31日, 東京大学数理科学研究科(東京都・目黒区)
17. Satoshi Kondo, On the rational  $K_2$  of a

- curve of  $GL(2)$  type over function fields, Colloquium, 2013年02月28日, Indian Statistical Institute, Bangalore(インド)
18. Yuichiro Taguchi, On congruences of Galois representations of global fields, The Arithmetic of Function Fields and Related Topics, 2013年02月18日, 海雲台, Riviera Hotel(韓国)
  19. 安田 正大,  $GL_d$  の smooth 表現の Galois 圏的解釈と保型 Euler 系, 九州代数的整数論 2013, 2013年02月13日, 九州大学(福岡県・福岡市)
  20. 平之内俊郎, A tensor product in the category of reciprocity functors, 九州代数的整数論 2013, 2013年02月11日, 九州大学(福岡県・福岡市)
  21. 平之内俊郎, 代数群に付随する Milnor 型  $K$  群と加法的 Chow 群, 代数的整数論とその周辺, 2012年12月06日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)
  22. 安田 正大, 多重ゼータ値についての最近の進展とドゥリノーヌ・伊原予想, 代数的整数論とその周辺, 2012年12月04日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)
  23. Seidai Yasuda, Galois representations attached to Siegel modular forms I,II, The 15th Hakuba Autumn Workshop on Number Theory, 2012年11月01日, 白馬ハイマウントホテル(長野県・白馬村)
  24. Takeshi Tsuji, The  $p$ -adic Simpson correspondence and Higgs crystals,  $p$ -adic cohomology and its applications to arithmetic geometry, 2012年10月30日, 東北大学(宮城県・仙台市)
  25. Yuichiro Taguchi, On congruences of Galois representations of function fields,  $L$ -functions and Arithmetic, 2012年10月23日~2012年10月26日, 延世大,ソウル(韓国)
  26. Seidai Yasuda,  $p$ -adic representations and  $p$ -adic Hodge theory,  $L$ -functions and Arithmetic, 2012年10月22日~2012年10月26日, 延世大,ソウル(韓国)
  27. Takeshi Tsuji, Higgs crystals, Summer School: "Higgs bundles on  $p$ -adic curves and representation theory", 2012年09月27日, the University of Mainz (ドイツ)
  28. Yuichiro Taguchi, Rational torsions points of abelian varieties over a large extension of a local field, Rational points on curves: A  $p$ -adic and computational perspective, 2012年09月25日, Mathematical Institute, University of Oxford (イギリス)
  29. 安田 正大, Brown 氏の研究における余積構造の利用法: Hoffman 基底と深さ filtration, 関西多重ゼータ研究会(第11回), 2012年09月22日, 京都産業大学(京都府・京都市)
  30. 安田 正大, 整係数 2 次元  $p$  進表現の構成, 第 57 回代数学シンポジウム, 2012年08月23日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)
  31. Takeshi Tsuji,  $p$ -adic perverse sheaves and arithmetic  $D$ -modules with singularities along a simple normal crossing divisor, Algebraic  $K$ -theory and Arithmetic, 2012年07月25日, Banach Center Bedlewo (ポーランド)
  32. Takeshi Tsuji,  $p$ -adic perverse sheaves and arithmetic  $D$ -modules with singularities along a simple normal crossing divisor, Arithmetic Geometry week in Tokyo, 2012年06月07日, 東京大学数理科学研究科 (東京都・目黒区)
- 〔図書〕(計 0 件)
- 〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)
- 名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:
- 取得状況(計 0 件)
- 名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
取得年月日:  
国内外の別:
- 〔その他〕  
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

安田 正大 (YASUDA Seidai)  
大阪大学・理学研究科・准教授  
研究者番号：90346065

(2) 研究分担者

近藤 智 (KONDO Satoshi)  
東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・  
客員准科学的研究員  
研究者番号：30372577

(3) 研究分担者

田口 雄一郎 (TAGUCHI Yuichiro)  
九州大学・数理学研究院・准教授  
研究者番号：90231399

(4) 研究分担者

平之内 俊郎 (HIRANOUCHI Toshiro)  
広島大学・理学研究科・助教  
研究者番号：30532551

(5) 連携研究者

辻 雄 (TSUJI Takeshi)  
東京大学・数理科学研究科・教授  
研究者番号：40252530