2版

様　式　C－19、F－19、Z－19　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 27 年　9 月 27 日現在

機関番号：14301
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2014
課題番号：24540019
研究課題名（和文）拡大体の有理性問題の研究

研究課題名（英文）rationality problem on extension fields

研究代表者
山崎　愛一（Yamasaki, Aiichi）

京都大学・理学（系）研究科（研究院）・准教授

研究者番号：10283590

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,500,000円

研究成果の概要（和文）：z P(x)y Q(x)の形の代数曲面Xの有理性問題を、多項式P(x),Q(x)に関する条件の形で決定した。
５次元以下のalgebraic torusに関する有理性問題を網羅的に解決した。３次元の場合はKunyavskiiによって解かれた。しかし４次元以上の場合は特別な場合しか知られていなかった。

研究成果の概要（英文）：Let X be an affine surface defined by the equation z P(x)y Q(x). The rationality problem of X has been solved in terms of the polynomials P(x) and Q(x).
The rationality problems of algebraic torus has been solved up to dimension 5. Rationality problems for algebraic tori of dimension 3 was determined by Kunyavskii. But as for algebraic tori of dimension 4 and 5, rationality problems were solved only for special cases.

研究分野：数論

キーワード：rationality problem　algebraic torus　conic bundle　Noether's problem

１．研究開始当初の背景

Galois の逆問題との関連で有理性問題の研究に取り掛かった。もともとは線型ネーター問題が中心であった。

しかし研究を進めるうち、他のいろいろな問題との関連が生じ、もう少し一般的に考えた方がよいとの観点から、現在ではかなり広い枠内で有理性問題を研究している。

有理性問題は、体 k の超越拡大体 K が純超越拡大が否かを問うことである。K の定義が一見して k 上純超越的でないように見えても、基底を取りかえることにより純超越的になることがある。そのようなことが可能かどうかを問題にする。すなわち肯定的な答は具体的に超越的な基底を見つけること、否定的な答は不可能なことを何らかの方法で証明することで、多くの場合どちらも達成されなくて未解決である。

何らかの方法とは、純超越拡大なら持っているはずの性質を、K が持っていないことを示すことで、いろんな方法が考えられるが、現在のところ不十分で、もっと強力な判定法が望まれる。

２．研究の目的

主に数論的な手法を用いて有理性問題を扱う。

代数幾何的な手法を用いた有理性問題の研究は今までからたくさんあった。その場合、一般的な広い枠組みの結果が多い反面、具体的な対象に適用するのが困難なものが多かった。そこで数論的な手法を用いて具体的な問題を解くのが本研究の目的である。

つまり今まで知られている数論的な手法を、改良したり一般化したりしながら、それが適用できる対象をさがして、今まで未解決だった場合を解決する、と言うのが主目的である。

例えば p 群のネーター問題を網羅的に調べているが、それは p 群が重要だからと言うより、現在知られている手法が適用しやすいからである。

交代群のネーター問題とか、純超越拡大の二次拡大の有理性問題とかの方が基本的に重要であろうが、現在のところ有効な方法がない。多くの人の努力にかかわらず、長年未解決である。

３．研究の方法

・数論や代数幾何の理論

・計算機による計算

を用いる。

研究のもとになっているのは数論や代数幾何の理論であるが、これを具体的な対象に適用して結果を得るには、膨大な計算を必要とする場合があり、計算機の利用が重要である。

特に現在やっているように、ある種の場合を網羅的に調べると言うような研究には、計算機による計算が必須である。

２０１４年９月から２０１５年３月までは台湾大學で Kang 教授のもとで研究を行った。Kang 教授は国際的にこの方面での中心研究者の一人であり、多くの助言を受けた他、彼を通じて外国の研究者との交流により視点が広がった。国内では新潟大学 星明考氏、和歌山大学 北山秀隆氏などと連絡し合い、共同研究をしたり討論したりしている。

４．研究成果

(1) z^2=P(x)y^2+Q(x) の形の代数曲面 X の有理性問題を、多項式 P(x),Q(x) に関する条件の形で決定した。この問題はもともと V.A.Iskovskikh により代数幾何の言葉を使って条件が示された。しかし具体的に曲面が与えられたときにその曲面が Iskovskikh の条件を満たすかどうか確かめるのは困難であった。多項式に関する条件の形で書くことにより、それを可能にした。

(2) ５次元以下の algebraic torus に関する有理性問題を網羅的に解決した。３次元の場合の algebraic torus の有理性問題は Kunyavskii によって解かれた。しかし４次元以上の algebraic torus に関する有理性問題は特別な場合しか解かれていなかった。

(3) G を位数有限の行列群とするとき、直既約分解の一意性が成り立つかどうかを 6 次元の場合まで網羅的に調べた。一般的には直既約分解の一意性が成り立たないことが知られていた。しかし二通りに直既約分解できる具体例は知られていなかったようである。4 次元までは直既約分解の一意性が成り立ち、5 次元では４次元＋１次元と３次元＋２次元の二通りに分解される群が全部で 11 個あることを示した。例えば

X=

0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
0	0	0	1	0
0	0	-1	-1	0
0	0	0	0	1

Y=

1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	0	-1	0
0	0	-1	0	0
0	0	0	0	1

とおくとき、X と Y で生成される群 G は位数 12 の 2 面体群と同型で、4 次元と 1 次元に直既約分解できることがわかる。ところが

P=

0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	-1	1	0	0
1	0	-1	0	0
0	0	0	0	1

とおいて、行列 P による群 G の共役

$G^P=P^{-1}GP$ を考えるとき

$P^{-1}XP=$

0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
1	0	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0

$P^{-1}YP=$

0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

となって 3 次元と 2 次元に直既約分解されることがわかる。

(4) G を Bravais 群、M_G を対応する Bravais 格子、$[M_G]^{fl}$ を M_G の flabby class とするとき、$H^1(G,[M_G]^{fl})=1$ が成り立つであろうと Voskresenskii は予想した。Voskresenski の予想が 6 次元までの Bravais 群についてはすべて正しいことを確かめた。

(5) (2),(3),(4) において、6 次元以下の GL(n,Z)の有限部分群の Z 共役類の分類が必要である。4 次元以下については、H. Brown, R. B¨ulow, J. Neub¨user, H. Wondratschek, H. Zassenhaus の表がある。5 次元 6 次元の場合も、Plesken らにより分類されているが、表が未整備であるため、4 次元以下の場合のように記号を使って群を指定したりすることは困難であった。GL(5,Z),GL(6,Z)の有限部分群の Q 共役類,Z 共役類にすべて番号をつけた。さらに、具体的に有限部分群が与えられたときにそれが何番の群に相当するかを決定するプログラムを GAP システムで作り、ホームページに公開した。

(6) 位数が素数べきであるような群で、３次の不分岐コホモロジーが自明でないような新しい例を見つけた。複素数 C を係数とするときの有限群 G の忠実表現の有理性問題については、２次の不分岐コホモロジーを用いて非有理性を示すのはよく用いられる手法である。Peyre は３次の不分岐コホモロジーを用いて位数 p^12(p は奇素数）の場合に非有理となる例を示した。そこで私は Peyre の方法を真似して位数 p^9 で非有理となる例を二つ作った。

(7) p を奇素数、p 次円分体の最大実部分体の類数が 1 とする。このとき二面体群 Dp が作用している Dp-lattice が flabby なら stably permutaion lattice となる。この結果は遠藤静雄の 1974 年の論文の結果に含まれていが、証明は非常に複雑で難しい。それを行列の形で同型対応を直接構成することにより、直接的な別証明を与えた。

(8) 過去の研究であるが、4 次元の線型ネーター問題を網羅的に調べ、3 次元の乗法的ネーター問題を網羅的に調べた。特に後者では、それまで知られていなかった否定的な場合を提示した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２　件）

<u>A.Yamasaki</u>
Negative solutions to three-dimensional monomial Noether problem.
Journal of Algebra Vol.370 (2012) pp.46-78

A.Hoshi, <u>A.Yamasaki</u>
Rationality problem for algebraic tori.to appear in Mem. Amer. Math. Soc.

〔学会発表〕（計５件）

Rationality problem of algebraic tori,
One-day workshop of algebra (invited by Prof. M. Kang),
National Taiwan Univ., Taiwan, Aug. 16, 2012.Rationality of conic bundles,
One-day workshop of algebra (invited by Prof. M. Kang),
National Taiwan Univ., Taiwan, Aug. 19, 2013.

Rationality problem of conic bundles,
SEOUL ICM 2014, Short Communications,
Coex, Seoul, Korea, Aug. 16, 2014.

(with Akinary Hoshi) Rationality problem for algebraic tori,
SEOUL ICM 2014, Short Communications,
Coex, Seoul, Korea, Aug. 19, 2014.

Rationality problem of conic bundles,
New Developments in Algebraic Geometry (invited by Prof. M. Kang),

National Taiwan Univ., Taiwan, Sep. 5, 2014.

〔図書〕（計０　　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

山崎愛一のホームページ
http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~yamasaki/
研究に関連したプログラムがダウンロードできるページ

http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~yamasaki/Algorithm/

プレプリント
Aichi Yamasaki,
Rationality problem of conic bundles.
arXiv:1408.2233.

Akinary Hoshi, Ming-chang Kang, Aichi Yamasaki,
Relation modules of dihedral groups.
arXiv:1503.04543

Akinary Hoshi, Ming-chang Kang, Aichi Yamasaki,
Degree Three Unramified Cohomology Groups.
arXiv:1503.08375

６．研究組織

(1)研究代表者

山崎 愛一（YAMASAKI, Aichi）
京都大学大学院理学研究科　准教授
研究者番号：10283590

(2)研究分担者

（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

（　　　）

研究者番号：