様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ７ 日現在

機関番号：１６３０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４００２２

研究課題名（和文）次数２のジーゲル保型形式に対するフーリエ・ヤコビ型球関数の研究とその応用

研究課題名（英文）Study of Fourier-Jacobi type spherical functions for Siegel modular forms of degree two and its application

研究代表者
平野　幹（Hirano, Miki）

愛媛大学・理工学研究科・教授

研究者番号：８０３１４９４６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：本研究課題に対する予備研究・類似研究において、十分に満足いく成果をあげることができた。主な成果は、GL(3,C)のクラス１でない主系列表現に対するホイッタカー関数の明示公式の応用として得られるGL(3)×GL(2)に対する複素素点におけるアルキメディアンゼータ積分の明示的評価である。これらは保型形式およびL関数の明示的理論において重要な結果であると思われ、今後の発展が期待される。

研究成果の概要（英文）： We reaped a satisfactory result in a preliminary and a similar study to the main theme. The principal results are explicit evaluations of the zeta integrals of GL(3,C)×GL(2,C) which is an application of our explicit formulas of the non-class 1 principal series Whittaker functions on GL(3,C). These are important for the explicit theory of automorphic forms and their L-functions.

研究分野：数物系科学

キーワード：フーリエ・ヤコビ型球関数　フーリエ・ヤコビ展開　保型L-関数　ジーゲル保型形式　ホイッタカー関数　ランキン・セルバーグ型ゼータ積分

１．研究開始当初の背景

保型形式、保型表現は整数論における重要な研究対象のひとつである。とりわけ正則保型形式は古典的に詳しく研究されている。その一方で、実解析的であるが正則でない保型形式については、例えば不連続群の L2-コホモロジー群に関する松島-村上理論で自然に現れるなどその重要性の認識はあるものの研究の未発達さについては認めざるを得ない。

非正則保型形式に対する研究の進展が遅々としている原因の一つとして、関連する特殊関数の解析的性質、明示的フーリエ展開などの整数論的研究に必要不可欠である基礎的研究があまり行われていないことが挙げられる。

このような観点から、多変数非正則保型形式の研究に対する基礎として、関連した特殊関数やフーリエ展開などの明示的研究は重要かつ急務であるといえる。

２．研究の目的

次数２の実シンプレクティック群 Sp(2,**R**)上のフーリエ・ヤコビ型球関数と保型形式および L-関数への応用について研究を行う。これまでに、いくつかの主要な系列に属する既約表現に対してフーリエ・ヤコビ型球関数を具体的に決定し、メイジャーの G-関数による表示を得ているが、本研究ではジーゲル極大放物部分群から誘導された主系列に属する表現に対してこの球関数の決定を試み、その成果をもとに、実解析的ジーゲル保型形式に対するフーリエ・ヤコビ展開を考察し、実解析的ヤコビ形式との関係について研究する。また、フーリエ・ヤコビ型球関数に類似の一般球関数とその応用についても研究を行う。特に、保型 L-関数に対応するゼータ積分の明示的評価を考察する。

３．研究の方法

まず、実解析的ジーゲル保型形式に対するフーリエ・ヤコビ展開についての予備研究として、Sp(2,**R**)のジーゲル極大放物部分群から誘導された主系列表現に対するフーリエ・ヤコビ型球関数の具体的決定について研究を行う。また、この研究を遂行するために Sp(n,**R**)や GL(n,**C**)の（一般）主系列表現に対するホイッタカー関数についての類似研究、および GL(3,**C**)の主系列表現に対するホイッタカー関数の明示公式の応用として、保型 L-関数に対応するゼータ積分の明示的評価の考察もあわせて行う。

球関数の決定においては、それらが必要条件としてみたすホロノミック系微分方程式を動径成分の座標について書き下し、明示的にその解を構成することが肝要である。しかし、この証明に要する計算は複雑かつ多大であるので、類似する球関数の研究により新たな知見を獲得しつつ、本研究に援用し、遂行する。また、ホイッタカー関数の明示公式のゼータ積分による保型 L-関数への応用においては、これまでに得られているホイッタカー関数の明示公式がゼータ積分を明示的に評価するのに十分であるかどうかについて考察する必要がある。

４．研究成果

本研究課題の主たる研究対象である次数２の実シンプレクティック群 Sp(2,**R**)上のフーリエ・ヤコビ型球関数とその実解析的ジーゲル保型形式に対するフーリエ・ヤコビ展開への応用については、残念ながら成果をあげるには至らなかった。しかしながら、予備研究・類似研究として行った GL(3,**C**)×GL(2,**C**)のゼータ積分の明示的評価については、満足いく成果をあげることができた。

以下、本研究で得られた成果を具体的に説明する。前回採択された課題において、アルキメデス素点における GL(3)×GL(1)のランキン・セルバーグ型ゼータ積分の明示評価を石井卓（成蹊大学）・宮崎直（北里大学）と共同で得ているが、今回得られた成果はこの研究の継続研究である GL(3)×GL(2)のランキン・セルバーグ型ゼータ積分の明示評価で

ある。前回と同様に、GL(3)上の（一般）主系列表現に対するホイッタカー関数の明示公式を応用してゼータ積分を評価するが、ホイッタカー関数の明示公式としては主系列表現の極小 K-type に対するある生成系に関する成分関数として現れるバーンズ積分表示を用いる。また、本研究においては GL(2)上の主系列表現に対するホイッタカー関数の明示公式も必要となるが、複素素点においては既知の公式だけでは不十分であるため、これについての新表示を証明し、ゼータ積分の評価に用いる。GL(3)×GL(2)ゼータ積分の評価における最大の困難は、GL(3)の主系列表現のK-typeベクトルをGL(2)の極大コンパクト群に制限することのコントロールにある。実際、GL(3)とGL(2)の表現の組み合わせによってはGL(3)の表現に対する極小K-typeにおけるどのホイッタカー関数をとってもゼータ積分の値が消えてしまうため、ゼータ積分の評価のためには GL(2)の極大コンパクト群への制限と適切にマッチングする GL(3)のホイッタカー関数を GL(3)の表現に対する極小 K-type ベクトルから（微分により）構成しなければならない。GL(3)とGL(2)の表現の組み合わせにより度合いが異なるが、すべての組み合わせに対してこの困難を克服し、GL(3,**C**)×GL(2,**C**)のランキン・セルバーグ型ゼータ積分の明示評価についての結果を上述の２名による GL(3,**R**)×GL(2,**R**)に対する同様な明示評価と一緒にまとめ、共同研究として学会発表を行った（学会発表①）。なお、ランキン・セルバーグ型ゼータ積分の評価についての主結果は、対応するL-関数のガンマ因子とゼータ積分が完全に一致するようなホイッタカー関数の存在証明である。有限個のホイッタカー関数を用いたゼータ積分の線形結合として L-関数のガンマ因子を表示できるという事実はジャッケによって知られていたが、我々はこれを一組のホイッタカー関数に対するゼータ積分で表示できることを示したものであり、実素点かつクラス 1主系列表現の場合のステードの結果、およびGL(2)×GL(1)の実および複素素点の場合のポパの結果から推測される GL(n+1)×GL(n)ゼータ積分に対する予想の成立を支持する結果である。我々の証明はステードやポパの場合と同様、単なる存在証明でなくベクトルを具体的に与えており、明示公式の成果なしでは為しえないものであることに注意したい。さらに、実際にゼータ積分を評価するにあたっては、極大コンパクト群の表現に対するゲルファント・ツェットリン基底でもゲルファント・ツェルビンスキー基底でもなくこれらとの計算可能な関係式をみたす特別な生成系に対する成分関数としてホイッタカー関数の明示公式を与えていること、ゼータ積分が消えないホイッタカー関数を GL(3)の極小 K-type から構成するだけでなく GL(2)の極大コンパクト群への制限をコントロールしていること、などの表現論的技法を駆使するだけでなく、積分の明示的な計算技術の観点からはバーンズの補題を適宜用いて変形することがその過程で本質的であったことなど、数学の様々な分野に対して知見を与えるものであることはこれまでの結果と同様である。

今後の研究課題としては、本研究において得られた成果およびその過程で得られた新しい知見を、ジーゲル極大放物部分群から誘導された主系列表現に対するフーリエ・ヤコビ型球関数の研究ならびに次数２の実解析的な非正則ジーゲル保型形式に対するフーリエ・ヤコビ展開の研究に援用しその研究を進展させること、予備研究の成果をさらに進展させ保型形式の L-関数の理論へ応用することなどがあげられる。特に GL(3)×GL(2)のランキン・セルバーグ型ゼータ積分の明示評価で得られた知見はその他のゼータ積分の評価、たとえばGL(2)の３重L-関数に対するゼータ積分の明示評価などに援用できることが期待される。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕（計　１件）

① Miki Hirano, Taku Ishii, Tadashi Miyazaki, Archimedean Zeta Integrals for GL(3)×GL(2),「モジュラー形式と保型表現」, 2015年2月4日, 京都大学数理解析研究所（京都府）

６．研究組織

(1)研究代表者

平野　幹（Hirano Miki）

愛媛大学・理工学研究科・教授

研究者番号：80314946