様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ５ 月 ２９ 日現在

機関番号：１７４０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４００２４

研究課題名（和文）部分群構造とそれに付随する組合せ構造を用いた単純群の構造の研究

研究課題名（英文）Study of simple groups by subgroups structures and associated combinatrial structures

研究代表者
千吉良　直紀（Chigira, Naoki）

熊本大学・自然科学研究科・准教授

研究者番号：４０２９２０７３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：散在型単純群の１つであるラドヴァリス群の構造の研究を主に行った。ラドヴァリス群の部分群である9元体上の3次元ユニタリ群を用いて、28次元複素表現空間上に格子を構成し、その格子から、標準基底に関するモノミアル部分群が構成できる。格子の最小ノルムベクトルの中からユニタリ群の位数7の部分群を用いて、直交基底を構成した。この直交基底に関する別のモノミアル部分群を構成し、ラドバリス群の生成系を構成した。またラドヴァリス群に関連する様々な組合せ構造の構成方法を見出した。

研究成果の概要（英文）：We mainly studied the structure of the Rudvalis simple group, which is one of sporadic simple groups. Using a subgroup isomorphic to 3 dimensional unitary group over a field of 9 elements, we can construct a lattice in a 28 dimensional representation space over a complex field, and we can construct a monomial subgroup with respect to the canonical basis for the space. Using a subgroup of order 7 in the uinitary group, we had an orthonormal basis, which consists of minimal norm vectors in the lattice. And we constructed another monomial group with respect to the orthogona al basis. From these groups, we can find a generator of the Rudvalis group. We also construct various combinatorial structures using the lattice.

研究分野：代数学

キーワード：単純群　組合せ構造

１．研究開始当初の背景

散在型単純群であるラドヴァリス群 Ru は 4060 点からなるランク 3 のグラフ自己同形群として構成される。この Ru は 2 元体上 28 次元のベクトル空間に作用していることが知られている。Ru はこの 28 次元空間に作用させて考えると、極大部分群の１つである $^2F_4(2)$が 1 次元部分空間を固定している。この 1 次元を Ru で動かすと 4060 個の 1 次元部分空間が得られる。この 4060 個の 1 次元部分空間を Ru の部分群である $U_3(3)$で軌道分解すると、各軌道の長さは 28, 63, 1008, 2016, 756, 189 となる。このうち長さ 28 の軌道に含まれる 1 次元で 28 次元空間全体が生成される。また、そのほかの各軌道も２－デザインとなっていてその自己同形群は $U_3(3)$または $U_3(3):2$ になっている。さらに各軌道の間にある種の関係を入れるとランク 3 のグラフが再構成できることが分かっていた。このようにあるベクトル空間の基底に置換として作用する部分群からもとの群が再構成できる例が知られていた。

また、Ru に関しては、Ru が自己同型群として作用する 2 元体上の長さ 4060 の自己双対符号が存在することが分かっているが、具体的な生成ベクトルなどについてはよくわかっていない。この符号を理解することも長さが大きい故、難しいと思われていた。

２．研究の目的

本研究の目的は、１）単純群の構成を考える上で重要である特徴的な部分群に着目し、その部分群から得られる組合せ構造を用いて、単純群の構成、特徴付けを行う、２）表現空間に注目して、この中で群を特徴付け出来るような構造を構成する。３）より一般的に、さまざまな組合せ構造や部分群構造等から群の性質を調べる。ということである。

Ru の例を整理する。一般に群 G の部分群 M と W をとる。G はあるベクトル空間 V に作用し、M は V の 1 次元部分空間を固定する。その 1 次元部分空間を G で動かしてできる軌道を W で軌道分解すると、その中のある軌道が V の基底をなす（ようなベクトルを含む）1 次元部分空間からなっている。Ru の場合、この各軌道間の性質から Ru のグラフを再構成できるようになっている。そこで、まず、Ru でそのようなことが起こる理由を明確にするため、Ru について、特に、28 次元表現について詳細に調べる。さらに、他の群への応用、すなわち、他の群で、よい表現空間があってその中によい組合せ構造を構成し、群を再構成できるか、ということについて考察する。組わせ構造としては、デザイン、符号、格子、可換代数などに注目し、それらの関係や群構造との関係を明らかにすることを目的とした。もう少し拡張して部分群から得られる群の性質についても研究を行う。また、より一般に部分群構造と群の関係や、組合せ構造と群の関係についても研究を行う。

３．研究の方法

Ru を中心に具体的な例を群論・組合わせ論用計算ソフトである Magma を用いて、具体的な群の状況を調べる。単純群とその作用する表現空間の組に対して特徴的な部分群や組合せ構造を探し、その構成方法と、その構造からの群の特徴づけを行う。得られたデータなどをもとに、専門家との研究討論を中心に研究を行う。

４．研究成果

（１）ラドヴァリス群についての状況を整理し、詳細な研究を行った。2 元体上で考察していたが、複素数体上 28 次元の表現を考えることが本質的であり、複素数体上 28 次元空間の中に Z[i]上の格子を具体的に $U_3(3)$を用いて構成した。この格子については、実 56 次元に埋め込んだ格子を考えると even unimodular になっていて、そのテータ級数もアイゼンシュタイン級数とヤコビ級数を用いて記述できる。

格子の最小内積をもつベクトルたちが 4060 ×4 個あるが、$U_3(3)$を用いて構成すると本質的に 2 種類の複素共役で移りあうものが構成できることが分かった。

$U_3(3)$の性質から 28 次元複素ベクトル空間の標準的な正規直交基底を用いて、格子に作用する $M=(4\times 2^6).U_3(3):2$ という群を構成することができる。この群を構成するためには一般 6 角形の性質を用いる。

28 次元複素ベクトル空間の基底として、いろんな取り方があるが、$U_3(3)$の部分群である位数 7 の部分群をとり、4060×4 個のベクトルを軌道分解し、その中からうまく 4 つの軌道をとると、それが 28 次元空間の基底になることが分かった。これがコンウェイの論文に書かれている四元数基底になっている。コンウェイの四元数基底が、具体的に標準基底への作用が分かっている $U_3(3)$の中の元を使って記述できたことになる。この基底の中からカルテットと呼ばれる４つ組を見つけることができ、これを用いると四元数群 Q_8 がこの格子に作用することが分かる。

また、前述の位数 7 の群を正規化する位数 3 の元を $U_3(3)$からとり、位数 21 のフロベニウス群を考え、四元数基底を動かすことにより、この格子に $L_3(2)$が作用することが分かる。ここに，ファノ平面が現れる。四元数群や $L_3(2)$には上述の M に含まれていない元がある。実際、四元数群の位数 4 の元は M に含まれていない。これと M を合わせれば、4.Ru が構成できることになるという意味で重要な群を $U_3(3)$から構成したことになる。

$U_3(3)$の位数 7 の部分群は四元数基底を構成するうえで重要な役割を果たしていた。その

軌道分解が基底を得る手掛かりになっていた。基底を構成するような軌道以外に注目する。すると、軌道内の 2 つのベクトルを取ると内積の値が常に 1 になるような軌道があることが分かる。この軌道には、それらとさらに内積が 1 になるベクトルがあるような軌道と、そうではなく、他には内積が 1 になるものがない、すなわち、軌道のベクトルが互いに内積 1 という性質に関して極大になっている軌道がある。この極大になっている軌道のベクトルの和をもとにして、ホフマン・シングルトン　グラフを構成することができる。このホフマン・シングルトングラフの自己同型群 $U_3(5):2$ は全体のベクトルに作用し、4.Ru の部分群になる。グラフの構成方法についてはコンウェイの論文に記述されているが、具体的に位数 7 の部分群の軌道を考えればよいということが明らかになった。
また、ホフマン・シングルトングラフからラドヴァリスのグラフを構成できることはクールセットによって示されていた。4060 点はホフマン・シングルトングラフの辺、5 角形、ヘキサッドと呼ばれる集合に対応している。1 点を含むヘキサッドが全部で 126 個存在している。
２元体上の n 次元のベクトル空間を対称差により n 点集合の部分集合全体と同一視する。千吉良・原田・北詰により、一般に n 点集合に群 G が作用するとき、２元体上の自己直交符号は G の位数２の元の固定点集合の集まりで生成される部分符号を含むことが分かっている。Ru の 4060 点上の置換においてはこの部分符号の次元が 2029 次元になる。このことから、Ru が作用する長さ 4060 の自己双対符号が存在することが分かっていたが、実際にその生成ベクトルを与えることは難しい問題であった。上述の 126 点を 2029 次元に付け加えて生成させることにより、自己双対符号を構成することができることが分かった。
さらに、ホフマン・シングルトングラフを考えることにより、この格子に作用する 6 次対称群を捕まえることができる。この 6 次対称群の 4060×4 個のベクトルへの作用を考えることにより、6 次対称群が作用する一般 8 角形の構造を考察することができる。このことを用いて ${}^2F_4(2)$の作用する一般 8 角形を特徴付けることができるが、${}^2F_4(2)$の複雑さゆえにきれいな形での理解が本研究ではし終えることが出来なかった。Ru を述べる上で ${}^2F_4(2)$をうまくとらえることが必要で、今後の研究においてこの一般 8 角形の良い記述を見出す必要がある。本研究で得られた結果は、いくつかの研究集会において、千吉良および北詰氏により発表している。論文としては、${}^2F_4(2)$の部分を解決し、公表する予定で継続して研究及び公表準備を進めている。本研究は、北詰正顕氏（千葉大学）との共同研究で行なわれた。

（２）散在型単純群の１つである 12 次のマシュー群 M_{12} は 45 次の既約表現をもっている。この既約表現は M_{12} を部分群として持つ 24 次のマシュー群 M_{24} の既約指標を M_{12} に制限しても既約であるという性質をもっている。マルゴリンにより、M_{12} が作用する有理数体上の 45 次元の表現空間上に、ある格子が構成されていた。本研究により、これとは異なる格子を構成した。この格子の最小ノルムのベクトルは、M_{12} の 2^6 型の元と 1 対 1 に対応し、さらに最小ノルムの間の内積が、対応する 2^6 型の元の積の関係によって記述できる非常に良い格子であることが分かった。この 45 次元の表現空間には結合的内積をもつ非結合的可換代数の構造が入ることが指標の計算からわかり、実際にその積を構成した記述はあるが、具体的に細かく分かりやすく記述されていない。この積の記述が、新しく構成した格子を用いてできると思われる。実際にいくつかの部分については、わかりやすい形で記述できることが分かった。この結果は、研究集会等で発表している。積をすべて記述し、この可換代数構造の自己同型群を決めることが今後の課題である。本研究は、北詰正顕氏（千葉大学）との共同研究で行なわれた。

（３）群が作用する組合せ構造と群の構造との関係について次のような結果を得た。2 重可移群が作用する 2 元体上の重偶自己双対符号で最小重みが理論的に最大になる符号の分類問題がある。マレヴィッチ・ウィレムスにより、長さ 1024 の場合のみが解決されていなかった。原田昌晃氏（東北大学）および北詰正顕氏（千葉大学）との共同研究により、この長さ 1024 の場合にそのような符号が存在しないことを示し、分類を完成させた。証明には千吉良・原田・北詰による自己直交符号に含まれる、位数 2 の元の固定点から生成される部分符号の存在定理を用いた。この定理が有効であることを示すうえで重要な結果が得られた。

（４）モンスター単純群は散在型単純群の中で最大の単純群である。単純群を調べる上で、シロー2 部分群の構造を調べることは基本的な問題である。シロー2 部分群の中に格別な 2 群が正規部分群になっているが、この正規部分群はシロー2 部分群の中心列を考えると対称的な構造をしていることが分かった。本結果は研究集会等で一部公表している。この格別な 2 群に作用する M_{24} の部分の 2 群をうまく記述することが今後の課題として残った。本研究は、北詰正顕氏（千葉大学）との共同研究で行なわれた。

（５）部分構造と関連して Hall の定理を斜準同型について拡張した定理について、その

一般化、及びその先の応用について研究を行った。これについての結果の一部を研究集会で発表を行った。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　2　件）
1. T. Asai, N. Chigira, T. Niwasaki and Y. Takgahara, On a thorem of P. Hall, J.Group Theory 16 (2013) 69—80 （査読有）DOI 101515/jgt-2012-0034.
2. N. Chigira, M. Harada and M. Kiatazume, On the classification of extremal doubly even self-dual codes with 2-transitive automorphism groups, Des. Codes Cryptogr. 73 (2014) 33—35 （査読有）DOI 10.1007/s10623-013-8907-6.

〔学会発表〕（計　4 件）
1. N.Chigira, A 45-dimensional representation of M_{12}, Taitung Workshop on group theory, VOA and algebraic combinatrics, 2015 年 3 月 7 日, 台東大学、　台湾.
2. N.Chigira,On the Rudvalis group I, Hualien Worksop in group theory, VOA, algebraic combinatrics and related topics, 2014 年 3 月 20 日、東華大学、台湾.
3. N. Chigira, A group of order 2^{46}, Taitung Workshop, 2013 年 3 月 28 日、台東大学、台湾.
4. 千吉良直紀, Hall の定理の一般化について、RIMS 研究集会「有限群とその表現、頂点作用素代数、代数的組合せ論の研究」、2013 年 1 月 10 日、京都大学数理解析研究所、京都府京都市.
5. 千吉良直紀, Rudvalis 群と格子、第 57 回代数学シンポジウム、2012 年 8 月 20 日、京都大学数理解析研究所、京都府京都市.

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
千吉良直紀（CHIGIRA, Naoki　　）
熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：40292073

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
渡邉アツミ（WATANABE, Atumi）2012 年
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：　90040120

平峰豊（HIRAMNE, Yutaka）
熊本大学・教育学部・教授
研究者番号：30116173

城本啓介（SHIROMOTO, Keisuke）
熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号：00343666