2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ３ 日現在

機関番号：１７４０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４００２５
研究課題名（和文）保型形式の整数論、具体的構成の観点からの研究領域の拡張

研究課題名（英文）Arithmetic of automorphic forms, an extension of its researching field in terms of explicit constructions

研究代表者
成田　宏秋（NARITA, Hiro-aki）

熊本大学・自然科学研究科・准教授

研究者番号：７０４３３３１５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：私の研究対象である保型形式論は、ラングランズプログラムなどに象徴されるように整数論において重要な役割を果たしてきた。本研究は保型形式の具体的に構成に軸足をおいて研究を深めることを目指すものである。研究期間で得た成果としては２つあり、ラマヌジャン予想の反例を与える保型形式の具体例の構成、それからある保型形式に付随するL関数の、関数等式の中点での非消滅を、超幾何関数という整数論とは違う由来を持つものの特殊値による判定に関する結果である。

研究成果の概要（英文）：The theory of automorphic forms, which is my reserach object, has been playing a crucial role in the number theroy as the achievements of the Langlands program indicate. The aim of this research is to deepen researches on automorphic forms in terms of their explicit construction. I have obtained two results: One is to provide explicit construction of automorphic forms which are counterexamples of the Ramanujan conjecture, and another one is a result on the non-vanishing of the central values of some automorphic L-functions in terms of special values of certain hypergeometric functions, whose origin does not come from the number theory.

研究分野：代数学

キーワード：5次元双曲空間　マース保型形式　リフティング　ラマヌジャン予想　保型L関数の中心値　超幾何関数　例外型リー群

１．研究開始当初の背景

保型形式論は整数論の一分野として、その役割は重要性を増していると言えよう。その研究手法は大きく分けて２つあり、関数のレベルで具体的に与えた保型形式について、その整数論的研究を深めようというスタイルがあり、これはヘッケやジーゲルによる保型形式の古典的な取扱いに由来するものと言えよう。もう一つは所謂「Langlands プログラム」に象徴される簡約代数群の表現論を手法とするスタイルである。このスタイルは保型形式をそれが生成する簡約群の表現つまり「保型表現」として捉え、保型形式をなるべく一般的な枠組みで捉え、主に保型形式が一般的に持つ定性的側面に迫ろうという研究手法と言えよう。

現在は両方のスタイルの専門家が、それぞれの問題意識の下に研究を深め互いに影響を与えながら、発展しているのが保型形式論の現状と言えよう。どちらかと言えば、現在、後者の方が主流であるという印象がある。私はこの後者の手法は強力で且つ有用であると考えているが、保型形式の全貌を明らかにするとまで言えるものではないと考えている。私は保型形式の具体的構成に注目する研究が深まって初めて、保型形式論のバランスのよく且つ地に足の着いた発展が期待できると考えている。また、こちらの手法の方が保型形式論の整数論に限定しない関連も見やすくなると考えている。実際、保型形式は、整数論の外の分野にその起源がある。保型形式の具体的構成に軸足を置いた研究は以上のような背景から意義があるものと考える。

２．研究の目的

私はこの研究期間以前では、主に離散系列表現を生成する保型形式について研究を深めてきた。より詳しくは保型形式論の詳しい研究は主に正則保型形式が扱われ、これは正則離散系列表現を生成するという表現論的特徴付を持つが、私は主に非正則離散系列表現を生成する保型形式に研究対象を広げる努力をしてきた。

依然として離散系列表現を生成する保型形式については、非常に多くの課題が残されているが、本研究では離散系列表現を生成する保型形式はもちろん、マースの波動形式などのようないわゆる「連続系列表現」を生成する保型形式に研究領域を広げようというのが目的の一つとしてある。また研究領域を拡張する対照として「例外型リー群」上の保型形式も研究対象として本研究に組み入れた。また他にも保型形式の研究には整数論以外の応用の可能性があることから、整数論に限定しない分野との関連も研究テーマとした。以上のように保型形式論の研究領域の拡張を，保型形式を具体的に構成するという手法で、様々な角度から試みようとするのが本研究の目的である。

３．研究の方法

(1) 例外型リー群 G_2上の保型形式の研究：
この保型形式の整数論については、２００２年に出版された Gross-Gan-Savin によるフーリエ係数の数論的研究の結果が代表的と言えるが、その研究で与えられた G_2上の保型形式の数論的性質を持つ保型形式の具体的構成は全く試みられていないと言ってよい。その研究の基礎を与えるべく G_2上の様々な球関数を明示的に与えることが研究の基礎となる。このような研究が進展すると、この保型形式の具体的構成に寄与する特殊関数が明らかとなる。これが完了すると球関数を不連続群上で平均化したり、球関数の明示型から適切と推測される特殊関数を試験関数としてテータ級数を作るなど具体的構成への道筋が見えてくる。より詳細には G_2 の四元数離散系列表現に対する一般化ホウィッタカー関数の明示型を求めることで、保型形式の具体的構成の研究の足掛かりを与えるという目論見である。

(2) マース波動形式の構成：
この研究テーマについては、実双曲空間上のマースカスプ形式の具体的構成が研究対象である。実双曲空間上の保型形式については「マースの逆定理」と呼ばれる、フーリエ級数表示で与えられた実解析的関数が保型性を満たすかどうかについての判定方法がある。これはフーリエ級数表示に現れるフーリエ係数からディリクレ級数を作り、その解析接続可能性や関数等式などの性質により保型性条件が導けるという主張である。我々は実双曲空間上のマースカスプ形式を、複素上半平面上のマースカスプ形式からのリフティングにより構成し、それが実際に保型形式であることをマースの逆定理を用いて証明するという方針で、マースカスプ形式の具体的構成を考える。

またこのマースカスプ形式が生成する保型表現について詳しく研究することもテーマである。構成したマースカスプ形式を代数群のアデール群上の保型形式と考えて、それへのヘッケ作用素やカシミール作用素の作用を調べることにより、その保型表現としての詳細な構造を明らかにする。

(3) ランキン型保型 L 関数の中心値の非消滅の超幾何関数の特殊値の非消滅による判定：
これは整数論に限定しない研究というテーマでの課題である。本研究以前の研究で、定符号四元数環上の保型形式に付随するランキン型 L 関数の中心値(関数等式の中点での値)の非消滅が、ある条件のもと超幾何関数の特殊値の非消滅により統制されることを発見した。したがってその L 関数の中心値が

実際に消えていないかどうかを調べるには、この超幾何関数の特殊値の非消滅を詳しく調べることに帰着できる。これについては、現在北海道大学に在籍している蛭子彰人氏が、超幾何関数の三項間漸化式を用いるという手法により部分的に解決した。他にもヤコビ多項式のある特殊値の非消滅に問題を読み替えて考える手法も蛭子氏により指摘された。この手法に従い計算機を用いるなどして残された未解決の場合について研究を進めた。

４．研究成果

(1) 例外型リー群 G_2 上の保型形式の研究：
本研究期間における研究の結果、研究の基礎を与える、G_2 の四元数離散系列表現に対する一般化ホウィッタカー関数の明示公式について、それが０になる結果がでた。しかしこれは G_2 上のカスプ形式の空間が零空間になることを意味するなど、既存の一般論に矛盾する。よってこの結果は間違いであると期待して、その間違いの原因を探る研究を続けてきた。一時は一般の離散系列表現に研究対象を広げることで原因を探ることを試みて、研究期間の終わりごろには結果的に四元数離散系列表現の場合に戻って原因究明に努めたが、結局解決には至らなかった。

例外型リー群上の保型形式の研究は以前流行した時期があったが、最近はその進展が聞かれず研究が停滞している状況に思える。Gross-Gan-Savin の研究が物語っているように、例外型リー群上の保型形式には、旧来の古典群上の保型形式の研究では見出されていない独特の数論的性質がある。今後も例外型リー群上の保型形式を、その具体的構成を軸とした研究を継続することで、その進展に貢献することを願ってやまない。

(2) マース波動形式の構成：
ここで述べる成果は、東稜高校の武藤正紀氏とオクラホマ大学の Ameya Pitale 氏との共同研究による成果である。

具体的には、実５次元双曲空間上のカスプ形式の具体的構成をレベル２の複素上半平面上のマースカスプ形式からのリフティングにより与えた。これはリフトされるマースカスプ形式のフーリエ係数から、双曲空間上のマースカスプ形式のフーリエ係数を適切に定義し、それによるフーリエ級数表示で与えられる関数により具体的構成を与えた。この構成方法は、次数２の正則ジーゲル保型形式の場合の斉藤-黒川リフトの類似である。

保型形式のリフティングによる構成は、しばしば非消滅かどうかというのが問題となるが、レベル２のマース形式の成す空間のラプラシアンのスペクトルの分布に関するいわゆる「ワイル則(Weyl’s law)」を使うと、非消滅のリフティングの存在が証明できる。

その後、研究は具体的に構成したマース形式が生成する保型表現の研究に進んだ。実５次元双曲空間上の保型形式は、定符号四元数環上の次数２の一般線形群で与えられる簡約代数群上の保型形式とみなすことができる。リフティングによるカスプ形式の構成は非緩増加な局所成分を持つ保型カスプ表現の構成を与えると期待される。これは所謂「Ramanujan 予想」の反例を与えることである。一方、通常の一般線形群の場合、Ramanujan 予想は成り立つであろうと信じられていることに注意する。ここで更に注意したいのは上述の定符号四元数環上の一般線形群は次数４の一般線形群の内部形式である。この内部形式群上の保型形式は Langlands 函手性から、一般線形群の保型形式と、L 関数を共有するなどの様々な似た振る舞いをすると考えられている。よってこの内部形式群上で Ramanujan 予想の反例が作れるとしたら、それは興味深いことは議論を待たないと思う。我々は構成したマースカスプ形式の保型表現の局所成分のすべてを、有限成分ではヘッケ作用素の作用そして無限成分ではカシミール作用素の作用の具体的な計算により、明示的に決定した。そしてすべての有限素点の成分では非緩増加で無限素点の成分では緩増加であることを証明した。即ち、この成果は Ramanujan 予想の反例を与えることができたことを意味する。

Ramanujan 予想についての研究を深めることは保型形式ないしは保型表現の分類に不可欠である。しかしその具体例を実際に保型形式のレベルで構成して見せる研究は少ない。このような観点からも我々の結果の意義が強調できると考える。

(3) ランキン型保型 L 関数の中心値の非消滅について：
これについては、上で述べた蛭子氏による結果及び指摘により、関係する超幾何関数の特殊値の非消滅について、ある有限個の場合について証明すればすべての場合が解決するということになり、計算機を使って観察をすることにした。しかし観察の結果、この残った有限個の場合というのは、計算機に頼るのみでは現実的に処理できるものではないことが判明し、完全解決には至らなかった。完全解決を目指すのであれば、これまでの手法とは違ったものが必要であると認識するに至っている。

一方、このテーマに関係する結果として、次数２のシンプレクティック群の内部形式である次数２の不定符号の四元数ユニタリー群上のある保型 L 関数の中心値についてのものがある。具体的にはあるテータリフトで与えられるこの四元数ユニタリー群上のカスプ形式に付随するランキン型 L 関数の中心値の非消滅性である。これについては上記の超幾何関数の特殊値で統制する手法で結果を得ているがその他に、リフトされる四元数環上の保型形式の L 関数の ε 因子の観点から

判定できるという結果を得た。手法は東北大学の千田雅隆氏と Ming-Lun Hsieh 氏による四元数環上のランキン型保型 L 関数の中心値の「素数 p を法とした非消滅」に関する結果を使うことである。これは当初の研究計画にはなかった成果であるが、我々の関心のランキン型 L 関数が関係しており、ここに記すにふさわしいと考える。

このＬ関数の中心値というのはリーマン予想や楕円曲線の BSD 予想などが物語っているように、興味を引いてやまない数学的神秘が潜んでいると期待されている。しかしその扱いは一般に簡単ではない。中心値が非消滅か否かを調べるのは基本的な問題であるが、それも十分研究テーマとなり得る。この研究で扱ったランキン型Ｌ関数の中心値の非消滅については、実はもっと強く、真に正であることが言える。このような結果はあまり見たことがない。またそれが超幾何級数という整数論とは違う由来のもので統制するという研究はおそらくないと思う。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）
Hiro-aki Narita, Bessel Periods of Theta Lifts to GSp(1,1) and Central Values of Some L-Functions of Covolution Type, Automorphic Forms, Researches in Number Theory from Oman, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 査読有, Vol.115, Springer-Verlag 2014, 179—191
DOI:10.1007/978-3-319-11352-4

〔学会発表〕（計９件）
① 成田宏秋、ある Rankin Ｌ関数の中心値の正値性と超幾何関数の特殊値, 第７回福岡数論研究集会、九州大学数理学研究院、２０１２年８月９日
② 成田宏秋、GSp(1,1)の Rankin 型のＬ関数の中心値の正値性と超幾何級数の特殊値、保型形式の整数論月例セミナー、東京大学大学院数理科学研究科、２０１２年９月１５日
③ Hiro-akiNarita,Jacquet-Langlands-Shimizu correspondence for theta lifts to GSp(2) and its inner forms, TORAIII, University of Oklahoma, ２０１２年９月２８日
④ 成田宏秋、Bessel periods of theta lifts to GSp(1,1) and strict positivity of central values of some convolution type L-functions, 第１５回整数論オータムワークショップ、白馬ハイマウントホテル、２０１２年１１月１日
⑤ Hiro-aki Narita, Real-valued real analytic automorphic functions, Speed TORA session, TORA IV, University of North Texas, ２０１３年３月２３日
⑥ Hiro-aki Narita, Epsilon dichotomy for some global theta lifts to GSp(1,1), TORA V, State University of Oklahoma, ２０１３年９月２１日
⑦ 成田宏秋、Lifting from Maass cusp forms for Γ_0(2) to cusp forms on GL(2) over a division quaternion algebra, RIMS 研究集会「保型形式および関連するゼータ関数の研究」、京都大学数理解析研究所、２０１４年１月２０日
⑧ Hiro-aki Narita, Lifting to an inner form of GL(4) and counterexamples of the Ramanujan conjecture, 日韓整数論セミナー、慶応義塾大学理工学部、２０１４年１１月２１日
⑨ 成田宏秋、Lifting to GL(2) over a division quaternion algebra and counterexamples of the Ramanujan conjecture、保型形式セミナー、上智大学理工学部、２０１５年３月１４日

〔図書〕（計　０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~narita/narita.htm

６．研究組織
(1)研究代表者
成田　宏秋（NARITA Hiro-aki）
熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：７０４３３３１５

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

(　　　　)

研究者番号：