3版

様　式　C－19、F－19、Z－19　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 28 年　9 月　9 日現在

機関番号：32601
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2015
課題番号：24540027
研究課題名（和文）標準Whittaker加群の研究

研究課題名（英文）Studies on the standard Whittaker modules

研究代表者
谷口　健二（Taniguchi, Kenji）

青山学院大学・理工学部・教授

研究者番号：20306492

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，実簡約型リー群の標準 Whittaker (g,K)-加群の構造解析を行い，以下のような成果を得た．
(1) 群 Spin(n,1), SL(3,R), Sp(2,R) の場合に，標準 Whittaker (g,K)-加群の構造を完全に決定した．その研究の過程で交代行列実現による直交リー環の普遍包絡環の中心元の新たな構成法を得たほか，SL(3,R) と Sp(2,R) の主系列表現の組成列を完全に決定した．
(2) あるクラスの split 群の場合，標準 Whittaker (g,K)-加群たちは coherent family の一部をなすことを示した．

研究成果の概要（英文）：The main topic of this research is the analysis of the structure of the standard Whittaker (g,K)-modules of real reductive Lie groups. Obtained are the following results:
(1) In the cases of Spin(n,1), SL(3,R) and Sp(2,R), we determined the structure of the standard Whittaker (g,K)-modules. As byproducts of this research, we obtained a new method of constructing the central elements of the universal enveloping algebra of orthogonal Lie algebras, and we determined the composition series of the principal series representations of SL(3,R) and Sp(2,R).
(2) We proved that, if the group in question satisfies some conditions, the standard Whittaker (g,K)-modules of this group lie in a part of a coherent family.

研究分野：リー群の表現論

キーワード：標準 Whittaker (g,K)-加群　リー群の表現論　主系列表現

1. 研究開始当初の背景

G を実簡約型リー群とし，G=KAN をその岩澤分解とする. N のユニタリ１次元表現から誘導された G の誘導表現 V を考える. G の表現πの， V の部分表現としての実現を，πの Whittaker 模型という. Whittaker 模型に関しては，Shalika, Kostant, Lynch, H.Matumoto らによって，その存在条件や重複度に関する深い理論が得られている．例えばπが既約なとき，πの Whittaker 模型が存在するための条件は，πが大きな表現であることであり，このときの重複度は Bernstein 次数と呼ばれる表現の不変量で与えられる．

このように，Whittaker 模型，つまり誘導表現 V の部分表現については多くのことが知られているが，その上部構造，即ち商表現や部分商表現については知られていることが非常に少ない状況であった．このような状況の下，本研究の代表者は V 全体の構造解析という問題を提起したが，この誘導表現の空間は非常に大きく，そのまま解析するのは困難である．そこで代表者は，V の元であって (1) 特定の無限小指標を持つ，(2) 緩増加関数からなる，(3) K-有限である，(4) ある部分群 M’ の右からの作用で M’ のある特定の既約表現に従う，という条件を課した表現を切り出し，それを標準 Whittaker (g,K)-加群と名付けた．

研究代表者はこの加群について研究を行い，本研究開始当初に於いて，以下のような結果を得ていた：

(1) 無限小指標が regular かつ generic な場合，標準 Whittaker (g,K)-加群の構造を完全に決定した．
(2) G が SL(2,**R**)，U(n,1) で無限小指標が regular かつ integral な場合，標準 Whittaker (g,K)-加群の socle filtration を完全に決定した．

２．研究の目的

上記「背景」で述べた状況を踏まえ，本研究では一般の実簡約型リー群の場合について，標準 Whittaker (g,K)-加群の構造を決定すること，つまり組成因子と socle filtration を完全に決定することを主目的とする．
研究開始時点では，まだ具体例が少なかったため，一般的な状況を理解する目的で，まずはさらなる具体例の構成を目標とし，低階数の群の場合について研究を行う．

それと並行して，一般論の展開，特に (i) 上記の定義の条件 (4) にある M’ の表現と標準 Whittaker (g,K)-加群の部分加群の対応，(ii) translation 関手を施したときの標準 Whittaker (g,K)-加群の振る舞い，さらに (iii) 幾何学的表現論との関係の模索，といったことを目的とする．

３．研究の方法

本研究開始時点では，一般的に成り立つような結果がほとんど無い．そのため，研究の初期段階では実階数の低い群で例を豊富に構成し，一般的な場合に対する予想を得ることから始める．まず実階数が１の群の場合については，既に結果を得た SL(2,**R**)，U(n,1) の場合と同様の手法を用いる．実階数が高い場合は，直接計算は飛躍的に難しくなるが，Sp(2,**R**) などの比較的構造の簡単な群についてなら直接計算も可能と考え，これらから解析を行う．

一般論については，研究目的の項の (i)～(iii) について考察を行う．そのうち特に重視するのは，translation 関手による標準 Whittaker (g,K)-加群の挙動の解析である．これは以下のような理由による．実簡約型リー群の主系列表現の組成因子問題は，Kazhdan-Lusztig-Vogan 予想と呼ばれ，Vogan によって解決された．その証明に於いて，translation 関手による表現の挙動の分析は中心的な役割を果たした．一方，標準 Whittaker (g,K)-加群と主系列表現の構造には類似性があるため，同様の手法で解析が可能であろうと考えたのである．

ここで最高ウェイト加群や主系列表現の組成列問題は，純粋に表現論的な手法ではなく，旗多様体上の幾何を用いて解決されたことを踏まえると，Whittaker 加群についても幾何的なアプローチがあると期待される．そこで Kazhdan-Lusztig 予想や幾何学的表現論の専門家との研究交流を通じて「Whittaker 幾何」の確立を模索する．

４．研究成果

無限小指標が generic な場合と，無限小指標が整で群が SL(2,**R**)，U(n,1) の場合については，申請時までに構造が完全に解明されていた．その続きとして，平成24年度は，無限小指標が整で群が Spin(n,1) のときに，U(n,1) の場合と同様の手法を用いて，標準 Whittaker (g,K)-加群の構造を完全に決定した．

この Spin(n,1) の場合では，K-type の shift 作用素によって，ある表現に含まれるベクトルが消滅するか否かで，標準 Whittaker (g,K)-加群の組成列を調べている．この計算に使う道具として，U(n,1) のときと同様に，普遍包絡環の中心元を用いた．その際，本研究に使うという目的に合った中心元を構成する必要があったため，本研究の副産物として，交代行列実現による直交リー環の普遍包絡環の中心元の新たな構成方法が得られた．

平成25年度は，当初は実階数2の群の場合について具体例の構成を試みたが，芳しい結果が得られなかった．そこで実階数2の群の主系列表現の socle filtration の決定問題に取

り組んだ．これは標準 Whttaker (g,K)-加群と主系列表現の構造には類似性があり，後々役に立つと考えたからである．この研究の結果，SL(3,$\mathbb{R}$) と Sp(2,$\mathbb{R}$) については，その主系列表現の socle filtration を完全に決定することに成功した．

平成26年度にはまず，本研究の当初からの課題であった，translation 関手による振る舞いについて研究を行った．その結果，群が SL(n,$\mathbb{R}$) や Sp(n,$\mathbb{R}$) を含むようなあるクラスに含まれる場合，translation 関手を用いてある標準 Whittaker (g,K)-加群の無限小指標を一つの regular Weyl chamber の中で動かしたものは，その無限小指標を持つ標準 Whittaker (g,K)-加群に同型であることを示した．これにより，上記の群については計算しやすい無限小指標の場合を計算すればよいことになった．

また，実階数2の群の場合の計算については，前年度までとは方針を変更し，確定特異点型偏微分方程式系の境界値問題を使うことにした．詳しく述べると以下のようになる．標準 Whittaker (g,K)-加群を特徴付ける微分方程式は，いくつかの超平面に確定特異性を持つような，確定特異点型偏微分方程式系である．その部分的境界値を用いて1変数への還元を行うことで，緩増加な Whittaker 関数をある程度特定できる．これに加えて既に知られている Whittaker 関数の明示公式や，主系列表現の socle filtration の情報を組み合わせることで，念願であった，実階数2の群の場合の具体例(G=SL(3,$\mathbb{R}$))を構成することができた．これは単に具体例をもう一つ構成しただけにとどまらない．境界値問題を使えば高階数の群の場合も扱えることがわかったほか，群が split なときには標準 Whittaker (g,K)-加群には自己双対的な構造があるという予想を得たため，今後の研究への大きな足がかりを得たのである．

平成27年度は，昨年度に SL(3,$\mathbb{R}$) の場合で成功した，確定特異点型偏微分方程式系の境界値を用いる手法を Sp(2,$\mathbb{R}$) の場合に適用して，無限小指標が regular かつ整なときの Sp(2,$\mathbb{R}$) の標準 Whittaker (g,K)-加群の構造を調べた．その結果，既に知られている Whittaker 関数の明示公式の情報などを援用することにより，Sp(2,$\mathbb{R}$) の標準 Whittaker (g,K)-加群の socle filtration を完全に決定することに成功した．

この結果は，群が split ならば，(1) K-タイプを固定したときに上記の微分方程式系の緩増加関数解の次元は無限小指標によらない，(2) 標準 Whittaker (g,K)-加群には自己双対性がある，という従来からの予想への肯定的な例ともなっている．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　６件）

(1) Kenji Taniguchi, Socle filtrations of the standard Whittaker (g,K)-modules of Spin(r,1), 査読あり, Kyoto J. Math. **55** (2015), No.1, 43--61.

(2) Kenji Taniguchi, Discrete series Whittaker functions on Spin(2n,2), 査読あり, J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **21** (2014), 1--59.

(3) Kensuke Kondo, Kyo Nishiyama, Hiroyuki Ochiai, Kenji Taniguchi, Closed orbits on partial flag varieties and double flag variety of finite type, 査読あり, Kyushu J. Math. **68** (2014), 113--119.

(4) 谷口健二， Sp(2,$\mathbb{R}$) の主系列表現の組成列について，査読無し，京都大学数理解析研究所講究録，**1877** (2014), pp104--120.

(5) Kenji Taniguchi, A construction of generators of Z(so_n), 査読あり, Josai Mathematical Monographs vol.6 (2013), 93--108.

(6) Kenji Taniguchi, On the composition series of the standard Whittaker (g,K)-modules, 査読あり, Trans. Amer. Math. Soc. **365** (2013), 3899--3922.

〔学会発表〕（計　５件）

(1) 谷口健二： 緩増加な Whittaker 関数の特定について，2015 年度表現論ワークショップ， 県民ふれあい会館（鳥取県立生涯学習センター），2016 年 1 月 10 日.

(2) 谷口健二： 標準 Whittaker (g,K)-加群の組成列，日本数学会 2015 年度年会函数解析分科会， 明治大学，2015 年 3 月 23 日.

(3) 谷口健二： 標準 Whittaker (g,K)-加群のいくつかの性質について，2014 年度表現論ワークショップ，県民ふれあい会館（鳥取県立生涯学習センター）， 2014 年 12 月 27 日.

(4) 谷口健二： Sp(2,$\mathbb{R}$) の主系列表現の組成列について，RIMS 研究集会「表現論および表現論の関連する諸分野の発展」， 京都大学数理解析研究所，

2013 年 6 月 27 日.

⑸ 谷口健二： Sp(2,**R**) の主系列表現の組成列について，2012 年度表現論ワークショップ， 県民ふれあい会館（鳥取県立生涯学習センター），2012 年 12 月 27 日.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
谷口 健二（TANIGUCHI Kenji）
青山学院大学・理工学部・教授
研究者番号：20306492

(2)研究分担者
( )

研究者番号：

(3)連携研究者
( )

研究者番号：