2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ２ 日現在

機関番号：３２６６０
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４００２８
研究課題名（和文）ポジティブ分岐の理論と楕円単数

研究課題名（英文）Positively ramified extensions and elliptic units

研究代表者
八森　祥隆（Hachimori, Yoshitaka）

東京理科大学・理工学部・准教授

研究者番号：５０４３３７４３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：　ポジティブ分岐拡大の岩澤理論の研究を行った。目的は、(a) 円分Z_p 拡大体上の最大p分岐p上ポジティブ分岐アーベルpro-p拡大のガロア群Xに対応する``p進L関数"の性質をより詳しく調べること、(b) Xのμ不変量が0という仮定なしでのXの性質の証明、(c) Xのより精密な構造の研究、である。
(a)は、基礎体が虚二次体のアーベル拡大である場合に、"p進L関数"の関数等式に関して得た部分的な結果を論文として発表の準備中である。(b)は、一般の基礎体の場合で、Xの特性多項式の関数等式の一部を示した。(c)については充分な結果を得られなかった。引き続き研究を続ける。

研究成果の概要（英文）：I studied Iwasawa theory for positively ramified extensions. The aims were: (a) to clarify properties of the "p-adic L-function" corresponding to the Galois group X of the maximal abelian pro-p extension which is p-ramified and positively ramified at p over a field of Z_p-extension, (b) to prove properties of X without "mu=0" assumption, and (c) to find more fine structures of X.
For (a), I obtained a result on certain functional equation of the "p-adic L function" when the base field is an abelian extension of an imaginary quadratic field, which I am preparing for publication. For (b), I had "a part of" functional equation of X for more general base field. For (c), I could not have enough progress and will continue my investigation.

研究分野：代数学

キーワード：整数論　岩澤理論　ポジティブ分岐拡大　楕円単数　岩澤主予想

１．研究開始当初の背景

ゼータ関数の特殊値という解析的対象を、代数的対象である不分岐ガロア群への群作用により解釈する古典的な岩澤主予想は、基礎体が CM 体の場合に定式化され証明されている。もう少し説明すると、K を CM 代数体、K_∞を円分的Z_p拡大とする (pは素数)とき、ガロア群 Gal(L^{ur}(K_∞)/K_∞) (L^{ur}(K_∞は K_∞上の最大不分岐アーベルｐ拡大) には、Gal(K_∞/K) の作用から定まる岩澤代数Λ=Z_p[[T]]上の加群の構造が入る。その特性イデアルが、K に付随する L 関数の負の整数点での値をｐ進的に補間するｐ進Ｌ関数によって生成されるというのが岩澤主予想であった。

この枠組みを、 CM でない代数体へ一般化することを試みたい。その場合、従来の補間性質ではｐ進Ｌ関数が０になってしまい、また不分岐拡大もあまりよい性質をもたないのだが、不分岐拡大のかわりにｐ上の分岐を制限付きで許したポジティブ分岐拡大(positively ramified extension)を考えることでそれらの困難の克服が期待できることが、A. Schmidt の研究(cf.[2])により示唆されている。具体的にはまず、CM 体 F を,奇素数 p 上の素点が最大総実部分体 F^+上不分解であるものとする。F の奇数次ガロア拡大の部分体Ｋで､ｐ上の各素点ｖについてK_v が F^+_v 上奇数次ガロア拡大の部分体 K_v^+と F_v の合成になるものを p で admissible な拡大といい、これを基礎体として考える。ここでＫはCM 体とは限らないことを注意する。Ｋの円分的 Z_p 拡大 K_∞上の p 分岐かつ p で positively ramified な最大アーベル pro-p 拡大 L^{ps}(K_∞)を考える。ここで、奇数次ガロア拡大 M/K がｐで positively ramified であるとは、ｐ上の各素点 w|v において、M_w が K_v^+の奇数次ガロア拡大 M_w^+と K_v の合成となっていることをいう。このとき X(K_∞)=Gal(L^{ps}(K_∞)/K_∞)は岩澤代数Λ上有限生成ねじれ加群となる。Schmidt はこの加群についていくつか結果を与えた。しかし現在まで X(K_∞)の性質はそれほど詳しく研究されてきていない。Schmidt も代数的な面の研究のみで、解析的な``ｐ進Ｌ関数" の考察は行なっていない。

これに関し、これまでに私は次のような結果を得ていた: F が虚二次体で admissible 拡大ＫがＦのアーベル拡大となっている特別な場合を考える。このとき Gal(K/F)の指標ψに対し、X(K_∞)のψ-part の特性イデアルが、楕円単数から作られるべき級数 F_ψにより生成されることが、虚二次体の岩澤主予想(cf. [3])から導かれる、という結果である。ここで F_ψは大雑把にいうと、K/F の導手をｆとして導手 fp^n の ray class field にある楕円単数を K_n へノルムで落としたものは n に関し逆系をなすが、これ（のψ-part）を Coleman 写像により移したΛの元である。楕円単数はＬ関数の特殊値と結びつくものなので、F_ψは“ｐ進Ｌ関数”でこの結果は``主予想”であると考えることができる。

参考文献

[1] K. Iwasawa, ``On Z_l-extensions of algebraic number fields”, Ann. of Math.(2) 8(1973), 246-326.

[2] A. Schmidt, ``Positively ramified extensions of algebraic number fields", J. Reine Angew. Math. 458 (1995), 93--126.

[3] K. Rubin, ``The ``main conjectures'' of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields", Invent. Math. 103 (1991), 25--68.

２．研究の目的

前述の Schmidt の結果は次のようなものである: K を一般の CM 体の admissible 拡大とするとき、

(1) μ不変量が 0 であるという仮定の下で、X(K_∞) のΛ上の加群としての特性多項式はある関数等式を満たす。
(2) X(K_∞)は有限部分Λ加群を持たない。
(3) 同じくμ不変量が０であるという仮定の下で、K_∞上の(アーベルとは限らない) 最大 positively ramified p 拡大のガロア群は Demskin 群になる。

K 自身が CM 体の場合、L^{ps}(K_∞)は K_∞上の最大 p-分岐アーベル p 拡大のプラスパートと最大不分岐アーベルｐ拡大のマイナスパートの合成体であり、有名な鏡映原理により上の(1)はすぐに分かる。(2), (3)もよく知られた結果に帰着される。Schmidt の結果はこの一般化であり、このことが positively ramified 拡大が考案された動機である。

これらと１．で述べたことをふまえ、本研究の目的は次を明らかにすることである。

(a) X(K_∞)の特性多項式はどのように記されるかという問題（岩澤主予想の類似)。
(b) Schmidt の結果ではμ不変量が０であるという仮定が必要であったが、この仮定をはずすこと。
(c) 更に、X(K_∞)のΛ上の加群としてのより精密な構造。

(a)については、１．で述べたように、Ｋが虚二次体Ｆのアーベル拡大という特別な場合に、X(K_∞)の特性イデアルが``p 進 L 関数”F_ψで生成されることを示した。しかし、F_ψが具体的にどのようにＬ関数の特殊値を補完しているかについては、まだ明らかではない。そこで当面の課題は、この構成された関数が、複素Ｌ関数の特殊値とどのように関係しているのかを探ることである。また、Schmidt の結果(1)から、F_ψにも関数等式があることが期待される。これを F_ψの性質の

みから証明したい。さらに、虚二次体以外のCM体のadmissible拡大K上のpositively ramified拡大に対し、期待される``p進L関数”とはどのような特徴づけで与えられるべきなのかを見出すことも課題である。

(b)については古典的岩澤理論では不分岐拡大のガロア群のμ不変量は0であるとの予想があり、X(K_∞)も同様にそうであろうという主張の根拠ともなっている。しかし、これは一般に証明されていることではないので、その仮定なしにX(K_∞)の期待されるべき性質を示すことは意味のあることである。古典的岩澤理論においても、μ=0の仮定なしに様々な性質を証明することは[1]などでも行われている。

(c)については、不分岐拡大のガロア群でなされた精密な構造の研究の手法が、X(K_∞)でも応用可能かどうかを検討する。

３．研究の方法

代数的整数論、岩澤理論における既存の理論、手法を用いて対象を詳しく解析することにより、新たな事実を見出すことをめざす。

(a)については、Fが虚二次体でadmissible拡大KがFのアーベル拡大である特別な場合を考えるが、この時K_∞において楕円単数という特殊な元の系列の存在はよく知られている。この楕円単数のより詳細な数論的性質を調べること、楕円単数の系列から構成される二変数の関数を一変数に還元したときの様子を観察することでこの関数の複素L関数の特殊値との関係を明らかにする。

(b)については、Schmidtの結果の(1)と(3)をμ不変量が0である仮定なしに与えることを目標としていた。(1)については、ポジティブ分岐拡大のガロア群(の双対)を定義するガロアコホモロジーの完全列をPoitou-Tate dualityを用いて観察し、Iwasawa pairingの手法の類似を追うことで自己双対pairingの構成を試みる。(3)については、ガロア群の構造が複雑になり難しい(Demskin群にはならない)と思われ、どのような手法を用いればよいか現在のところ検討がつかない。当面(1)に集中して検討を行う。

(c)については、従来の岩澤理論で用いられてきた不分岐アーベルp拡大の構造を解析する手法を準用することで、X(K_∞)のより精密な構造を調べる。

また、問題解決のアイデアを得るべく、整数論関係の書籍の調査や、出張や招聘による国内外の研究者との研究討論を実施する。理論的には分からないところには計算機を用い具体的な例を観察しながら予測を試みる。

４．研究成果

(a)については、Fが虚二次体でadmissible拡大KがFのアーベル拡大である場合に私がこれまでに示していた``主予想”と、本研究で得た``p進L関数" F_ψの関数等式に関する部分的な結果を合わせて、論文

[4] Y. Hachimori, ``Positively ramified extensions and elliptic units", in preparation.

として現在発表準備中である。虚二次体上の岩澤主予想はK. RubinがEuler systemの議論を用いて多くの場合を示している(cf. [3])が、未証明の場合が残されている。今興味のあるpがFで不分解の場合もRubinは取り扱っていて主予想もほぼ示されているのだが、その後の多くの研究において取り扱われてきたpが分解する場合に比べ、楕円単数の性質などもあまり深く研究されてきていなかった。そこでRubinの議論を改めて吟味し、残された場合でどこがうまくいかないか、改善の余地がないか検討した。また、一般のCM体のadmissible拡大の”p進L関数”の特徴づけについては、有限次アーベル**p**拡大における単数群のregulatorの``χ-part" (χは位数**p**巾の指標)を正確にどのように定義すればよいかを考える必要があり、検討したがうまくいかなかった。これは今後の課題とする。

(b)については、X(K_∞)のμ不変量が0と仮定せずにX(K_∞)の特性多項式が関数等式を持つことを示すことを第一の目標としていた。そのためにX(K_∞)の双対を定義するガロアコホモロジーの完全列を、Poitou-Tate dualityを用いて観察した。具体的には、GH → LH (GH=H^1(K_S/K_∞,Q_p/Z_p)はglobalなガロアコホモロジー、LH= Π _{w|p} H^1(K^{ur}_{∞,w}, Q_p/Z_p)^{-}はlocalなガロアコホモロジー、但し{-}はGal(K_v/K_v^+)が(-1)倍で作用する部分を意味する）というタイプの写像の核としてX(K_∞)の双対Sを定義することができ、その余核は、Sと関連するある群によって記述することができる。これから、いわゆるIwasawa pairingの手法(cf. [1])の類似を追うことにより、目標の証明に必要と思われたX(K_∞)のμ=0部分の自己双対pairingを得ることはできなかったものの関数等式の一部を得ることができた。さらに、LHから(GH→LH)の余核への写像をより具体的に詳しく調べた。最終的に満足すべき結果を得るには至っていないが、これまでに得られた結果を発表するべく準備中である。

(c)については、X(K_∞)の特性多項式には関数等式があるが、これは基礎体がCM体の場合には、X(K_∞)がプラスパートとマイナスパートの直和となることから、よく知られた鏡映原理によりほぼ自明に得られるものであった。基礎体がCM体でない場合にはX(K_∞)はこのような単純な直和の形では表されないと思われるのだが、関数等式はあるので、それが何らかの形でX(K_∞)の構造に反映されていると期待した。とりあえずの手がかりとして、円分Z_p拡大の中間体上の最大ポジ

ティブ分岐アーベル p 拡大のガロア群の(移送写像に関する)順極限の双対の構造、特にそれと X(K_∞)との間の関係や、順極限をとるときの核 ("単項化")などについて考察した。しかしながらこれについては満足するべき結果を得るに至らなかったため、引き続き研究を続ける。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計０件）

〔学会発表〕（計２件）
① 八森祥隆，``ポジティブ分岐拡大の岩澤理論について"，岩澤理論セミナー，慶應義塾大学，神奈川県・横浜市，2013 年 10 月 5 日．
② 八森祥隆，``ある制限付分岐拡大について",学習院大学土曜セミナー，学習院大学，東京都・豊島区，2013 年 3 月 2 日．

〔その他〕
ホームページ等　特になし

６．研究組織
(1)研究代表者
八森　祥隆（HACHIMORI Yoshitaka）
東京理科大学・理工学部・准教授
研究者番号：50433743