

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 13 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540034

研究課題名(和文)エフェクティブなグリーン予想の研究

研究課題名(英文)Study on effective Green conjecture

研究代表者

宮岡 洋一 (Miyaoka, Yoichi)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：50101077

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：代数多様体上の部分多様体およびベクトル束を研究した。研究期間内に得られた主要成果は、ヒッグズ束の基礎理論を純代数的な方法によって構築したことである。基礎理論の柱となるのは、1) ヒッグズ束の一般スペクトル分解、2) ヒッグズ束の半安定性が一般の超曲面への制限やテンソル積で保存されるという制限定理とテンソル積定理、3) 半安定ヒッグズ束の特性類に対する Bogomolov 不等式である。以上の結果により、ヒッグズ束の理論は、通常のベクトル束の理論と同程度に使いやすいものとなった。

研究成果の概要(英文)：We studied subvarieties and vector bundles on algebraic varieties. The main result obtained by our project is the construction of purely algebraic theory of Higgs bundles. We proved among others the following basic results: 1) general spectral decompositions of Higgs bundles; 2) the restriction theorem and the product theorem, which assert that semistability of Higgs bundles is preserved by restriction to general hypersurfaces and by tensor products; and 3) the Bogomolov inequality for characteristic classes of semistable Higgs bundles. Thanks to the above results, the theory of Higgs bundles is as useful in algebraic geometry as is the theory of ordinary vector bundles.

研究分野：代数幾何学

キーワード：ヒッグズ層 スペクトル分解 制限定理 テンソル積定理 Bogomolov 不等式

1. 研究開始当初の背景

本研究のタイトルにあるグリーン予想、ないしはグリーン・グリフィス・ラング予想とは、複素平面から一般型多様体への正則写像の像はすべてより小さい部分多様体に含まれるであろうという予想である。この予想は多変数複素解析学ばかりかモデル型定理など、整数論にも関連する重要な予想である。そしてこの予想が一般次元で正しいとすると、一般型代数曲面に含まれる有理曲線や楕円曲線の標準次数は曲面の位相不変量の関数で上から押さえられることが知られていた (Caporaso-Harris-Mazur)。

2. 研究の目的

(1) 本研究の本来の目標は、曲面に対するエフェクティブなグリーン予想の解決、すなわち一般型代数曲面上の代数曲線の標準次数を、曲線の種数および曲面の位相的不変量によって明示的に上から評価することであった。

(2) (1) の目標を達成するために、現在考えられるもっとも強力な手段の一つとして、従来のもものと比較してさらに一般化かつ強化された宮岡・Yau 不等式を開発することを、第2の目標とした。

3. 研究の方法

3年間の研究期間において第1の目標へ向けて、派生目標である第2のテーマ、すなわち宮岡・Yau 不等式の一般化に注力し、顕著な成果が得られた。具体的には、ヒッグズ層と呼ばれる構造付きの層に対する代数的な一般基礎理論を構築し、ヒッグズ束に対する Bogomolov 型不等式として、一般化された宮岡・Yau 不等式を得た。

従来ヒッグズ層は、微分方程式論および微分幾何的な方法論により研究されてきたが、純粋に代数的なアプローチを取ることにより、ヒッグズ層の理論はより見通しのよいものとなった。特に標準ツイスト加群とのテンソル積によって構成されるヒッグズ層の標準的変形を経由することによって、ヒッグズ層というより複雑なカテゴリーにおける、「半安定層」に対しても、一般の半安定ベクトル束について知られている基本的所結果はすべて一般化され、Bogomolov 不等式はそれら一連の諸結果のうちの一つということになる。

4. 研究成果

(1) 対称テンソル環上の加群としてのヒッグズ束の定式化。ヒッグズ束やヒッグズ層とは、ある種の接ベクトル作用をもつベクトル束や接続層のことであるが、これを接束が生成する対称テンソル代数上の加群として純粋に代数的に定式化した。形式的には単なる言い換えにすぎないが、この定式化によって対称テンソル代数上のテンソル積といったヒッグズ束の組織的構成が可能となり、標準ツイストヒッグズ加群とのテンソル積によるヒッグズ層の変形の構成に至った。

(2) 半安定ヒッグズ束の一般論。高次元射影多様体の一般多重偏極に対する半安定性を定義し、対応する Harder-Narasimhan フィルトレーションの一意存在、全射正則写像の引き戻しでの挙動等、ベクトル束と同等の理論を整理した。

(3) スペクトル多様体とスペクトル分解。複素多様体 M 上に与えられた階数 r のヒッグズ束 \mathcal{E} が与えられると、 M 上の余接束の中に M の r 次の有限分岐被覆であるスペクトル多様体 Σ が定まる。 Σ の既約成分の関数体をすべて含むように分岐被覆 $f\tilde{M}$ をとり、 M, \mathcal{E} を \tilde{M} と \mathcal{E} の引き戻しで置き換えれば、 \mathcal{E} のヒッグズ場の固有微分形式 $\omega_1, \dots, \omega_s$ が M 上の正則微分形式として定まる。 M の生成点 $\text{Spec } \tilde{K}$ において、 r 次元ベクトル空間 $\mathcal{E} \otimes \tilde{K}$ は ω_k に対応する広義固有部分ベクトル空間の直和であり、このベクトル空間と \mathbb{E} との共通部分は広義固有部分層とよばれるヒッグズ部分層である。広義固有部分層においてはヒッグズ場はスカラー場 (正則一次微分形式) とべき零場の和に分解する。

(4) ジョルダン分解。ヒッグズ層 \mathcal{E} を与えると、ヒッグズ場のスカラー場とべき零場の和への分解 (ジョルダン標準形) に応じて、べき零部分の非自明性を表すジョルダン・フィルトレーションおよび双対ジョルダン・フィルトレーションが標準的に定まる。これらのフィルトレーションが定める次数付き加群はヒッグズ場のべき零部分がない半単純ヒッグズ層である。

(5) Mehta-Ramanathan 型制限定理。ヒルベルト・スキームの理論とセーの消滅定理を組み合わせることにより、射影代数多様体上の半安定ヒッグズ層を一般の十分次数が高い超曲面に制限するとふたたび半安定ヒッグズ束であることを示した。この定理により、一

般次元多様体上の理論を多くの場合低次元多様体上の理論に帰着することができる。

(6) 曲線および曲線族上のヒッグズ束の標準変形のツイスト理論. 対称テンソル環をそれ自身の上の加群と考え、加群としての変形を考えることができる。これを標準ツイスト加群といい、局所的にはもとの対称テンソル環と同型である。与えられたヒッグズ層に対して、標準ツイスト加群とのテンソル積を、対称テンソル環上で考えることができ、これをヒッグズ層のツイストと呼ぶ。これによって、曲線や曲線族の上に与えられたヒッグズ層に対して、非自明なヒッグズ変形を構成することができる。

(7) テンソル積定理. テンソル積定理は、2つの半安定ヒッグズ束のテンソル積がふたたび半安定であり、とくに半安定ヒッグズ束の外積や対称積は半安定であることを主張する。この定理は後述する Bogomolov 不等式の証明等で本質的に使われる重要な結果である。前項の制限定理より、曲線上のヒッグズ束について証明すれば十分である。この場合、ヒッグズ束が半安定であるためには、(5) 項でのべたツイストを一般にとったときにベクトル束として半安定になることが必要十分であることを証明する。

(8) Bogomolov 不等式. 代数数多様体上の豊富因子 H_1, \dots, H_{d-2} と階数 r の (H_1, \dots, H_{d-1}) 半安定ヒッグズ層 \mathcal{E} に対して、不等式 $2rc_2(\mathcal{E})H_1 \cdots H_{d-2} \geq (r-1)c_1^2(\mathcal{E}H_1 \cdots H_{d-2})$ が成立するというのが Bogomolov 不等式である。制限定理により、曲面上の層について証明すれば十分である。この場合も、曲面を曲面族とみなし、ツイストによって半安定ヒッグズ束をベクトル束として半安定なヒッグズ束に変形できることを示す。

(9) 一般化された宮岡・ヤウ不等式. 単線織的でない d 次元非特異射影多様体 M の余接束と自明束の直和は、ベクトル束としてはたいてい不安定であるが、ヒッグズ束としては多くの場合半安定である。このヒッグズ束に対する Bogomolov 不等式は一般化された宮岡・ヤウ不等式 $2(d+1)c_2(M)H_1 \cdots H_{d-2} \geq dc_1(M)^2H_1 \cdots H_{d-2}$ を与える。つまり曲面論や3次元双有理幾何で重要な役割を果たす宮岡・ヤウ不等式は、ヒッグズ版 Bogomolov 不等式の特別な場合と解釈することもできるのである。

さて以上われわれがヒッグズ束について示した基本的諸結果は、ヒッグズ束固有の結果であるスペクトル分解を除けば、すべてベクトル束に対する既知の結果の一般化である。いいかえると半安定ベクトル束に関する基本結果はすべてヒッグズ束に一般化できる。こうした一般化が可能であるらしいことは、以前から観察されていたのであるが、それがどういうメカニズムによるのかは、必ずしも明らかではなかった。Bogomolov 不等式に対してはじめてそれを明らかにしたのは Carlos Simpson で、Higgs 束の Yang-Mills 理論を展開して安定ヒッグズ束に調和計量 (harmonic metric) を構成し、ベクトル束に対する小林・Hitchin 対応がヒッグズ束にも拡張できることを示したのであった。Simpson の結果は望月拓郎によって線型微分方程式論の立場からさらに拡張・一般化された。このようなゲージ理論的アプローチは精緻であり、非常に有効ではあるが、反面難解かつ複雑である。従って彼らの方法をさまざまな方向に一般化するには高度のテクニックを要する。

上に述べたゲージ理論的 (微分幾何的かつ解析的) な方法と比較すると、われわれの方法は完全に代数的かつ初等的であって、それなりの存在価値がある。半安定なヒッグズ束をベクトル束として半安定なヒッグズ束まで変形する族として、局所的には標準的なヒッグズ束と同型なヒッグズ束とのテンソル積を構成するのであるが、この構成のためにはヒッグズ束を接束の対称積上の加群と見ることが本質的であって、代数的なもの見方の有効性を示す一例となっている。

またテンソル積定理は、ごく基本的な結果であるにもかかわらず、ゲージ理論的な方法では従来証明されていなかった結果である。高次元の宮岡・ヤウ不等式も従来の微分幾何的方法では標準因子 K が豊富で $H_1 = \cdots = H_{d-2}$ の場合にしか証明されておらず、われわれが上に与えた一般的不等式は新しい結果である。

5. 主な発表論文等

[学会発表] (計5件)

- ① 宮岡 洋一, Bogomolov-Miyaoka-Yau 不等式をめぐって, 2014 年 12 月, 岡シンポジウム, 奈良女子大学理学部
- ② Yoichi Miyaoka, Algebraic theory of Higgs bundles, 2014 年 8 月, Peternell 60 conference, Univ. Freiburg (ドイツ)

③ Yoichi Miyaoka, Mehta-Ramanathan theorem for Higgs bundles, 2014 年 6 月, Moduli spaces of real and complex varieties, Univ. Angers (フランス)

④ Yoichi Miyaoka, Canonical degrees of curves on a surface of general type, 2013 年 9 月, Classification of algebraic varieties and related topics, Cetraro (イタリア)

⑤ Yoichi Miyaoka, Towards an algebraic proof of the Bogomolov inequality of Higgs bundles, Simons Institute, New York, N.Y. (米国)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

宮岡 洋一 (MIYAOKA, Yoichi)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：50101077