様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 27 年　 6 月　 5 日現在

機関番号：13501
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：24540038
研究課題名（和文）Ｈｅｒｍｉｔｅ上半空間を周期領域にもつＫ３曲面の族の研究

研究課題名（英文）families of K3 surfaces parameterized by Hermitian half spaces

研究代表者
小池　健二（KOIKE, Kenji）

山梨大学・総合研究部・准教授

研究者番号：20362056
交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,200,000円

研究成果の概要（和文）：5次元射影空間に8次の非特異Jacobian Kummer曲面の方程式をテータ関数により与えた。これにより、80個あるrosenhainの超曲面と32本の直線を具体的に決定できた。更にSiegelモジュラー多様体上のKummer曲面のファイブレーションも調べた。全空間は非特異5次元多様体であり塩田の楕円モジュラー曲面の高次化と考えられる。またWeyl群W(E6)が作用する超曲面として実現される4次元モジュラー多様体も研究した。

研究成果の概要（英文）：We gave explicit equations of smooth Jacobian Kummer surfaces of degree 8 in the five dimensional projective space by theta functions. As byproducts, we wrote down Rosenhain's 80 hyperpanes and 32 lines on these Kummer surfaces explicitly. Moreover we studied the fibration of Kummer surfaces over the Satake compactification of the Siegel modular 3-fold of level (2,4). The total space is a smooth projective 5-fold which is regarded as a higher-dimensional analogue of Shioda's elliptic modular surfaces.
We also studied a modular 4-fold that are realized as a W(E6)-invariant hypersurface in the five dimensional projective space.

研究分野：代数幾何

キーワード：テータ関数　クンマー曲面　モジュラー多様体　ワイル群

１．研究開始当初の背景

(1) １次元複素トーラス $E(\tau)=\mathbb{C}/(\tau\mathbb{Z}+\mathbb{Z})$ は３次元射影空間 $\mathbb{P}^3$ に４次のテータ関数を用いて埋め込むことができる。具体的には正則写像 $E(\tau)\to\mathbb{P}^3$

$$x_{00}=\theta_{00}(2z,\tau),\quad x_{01}=\theta_{01}(2z,\tau)$$
$$x_{10}=\theta_{10}(2z,\tau),\quad x_{11}=\theta_{11}(2z,\tau)$$

の像は(2,2)完全交叉

$$a_0\, x_{00}^2 = a_1\, x_{01}^2 + a_2\, x_{10}^2 \quad \cdots (1)$$
$$a_0\, x_{11}^2 = a_2\, x_{01}^2 - a_1\, x_{10}^2 \quad \cdots (2)$$

であり、係数はテータ零値

$$a_0=\theta_{00}(0,\tau)^2,\quad a_1=\theta_{01}(0,\tau)^2$$
$$a_2=\theta_{10}(0,\tau)^2$$

で与えられる。これ等は２次関係式

$$a_0^2 = a_1^2 + a_2^2$$

を満たし、レベル４の保型形式が成す次数付環は a_0,a_1,a_2 により生成される。これにより上述の完全交叉は $\mathbb{H}/\Gamma(4)$ 上の楕円ファイブレーションと見なせる。更に

$$a_0\, x_{01}^2 = a_1\, x_{00}^2 + a_2\, x_{11}^2 \quad \cdots (3)$$
$$a_0\, x_{10}^2 = a_2\, x_{00}^2 - a_1\, x_{11}^2 \quad \cdots (4)$$

を合わせて考えると、コンパクト化された塩田の楕円モジュラー曲面 $S(4)$ が得られ、これは フェルマー4 次曲面と同型となる事が知られている。ところが高次元の場合は、アーベル多様体の定義方程式は非常に複雑である。例えば、4 次のテータ関数により主偏極アーベル多様は 15 次元射影空間 $\mathbb{P}^{15}$ に埋め込まれる。Flynn は種数２の曲線 C のヤコビ多様体 Jac(C)を、C の方程式の係数を用いて 72 個の quadric の交差として記述した。(E. V. Flynn, ***The Jacobian and formal group of a curve of genus 2 over an arbitrary ground field***, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 107 (1990), no. 3, 425-441.）一方、クンマー曲 Jac(C)/<±1> は３次元射影空間 $\mathbb{P}^3$ の４次曲面として実現され、その非特異極小モデル Km(C) は５次元射影空間における３つの quadric の完全交叉

$$x_1^2 + \cdots + x_6^2 = 0$$
$$k_1\, x_1^2 + \cdots + k_6\, x_6^2 = 0$$
$$k_1^2\, x_1^2 + \cdots + k_6^2\, x_6^2 = 0$$

として与えられる。この方程式は Klein によって発見された。3 曲面は楕円曲線の(アーベル多様体とは異なる)高次元化と考えられるので、この方程式を上述の方程式(1),(2)の高次元化と見なして研究する事は興味深い問題である。この完全交差には、2-torsion の blow-up により得られる 16 本の直線と、テータ因子を平行移動したものの像(trop)として得られる 16 本の直線が存在する。これ等 32 本の直線は Rosenhain の超平面と呼ばれる、80 枚存在する特殊な超平面による切断として得られる。この事は古典的に知られているが, 具体的に 32 本の直線を記述する事は簡単ではない。

(2) 一般に Siegel モジュラー多様体の方程式を記述する事は難しい問題であるが、有界対称領域の算術商が非常に簡明な、そして美しい対称性を有する超曲面として記述される例が古典的に知られている。レベル７の主合同部分群に対するモジュラー曲線のコンパクト化はクライン 4 次曲線と同型であり、3 次元のモジュラー多様体としては、Segre cubic **S3**、Igusa quartic I4、Barth－Nieto quantic **N5** などが知られている。これ等は何れも 4 次元射影空間における、6 次対称群で不変な超曲面である。**S3** は 10 個の node を持つ一意的な３次元３次超曲面であり、Picard モジュラー多様体 $\mathbb{B}_3/\Gamma(1-\omega)$ の射影モデルである。**I4** はレベル２の主合同部分群に対する Siegel モジュラー多様体であり、**N5** の２重被覆は偏極(1,3)の Siegel モジュラー多様体と双有理同値である。これ等の超曲面の間には次の様な関係がある。**I4** と **S3** は射影双対であり、**N5** は **S3** の Hessian 超曲面となっている。 Hunt は **I4** の Hessian 超曲面もまたモジュラー多様体ではないかという問題を提示した(The geometry of some special arithmetic quotients, Springer LNM1637)。更に Weyl 群 $W(E_6)$ に対し、一意的な $W(E_6)$-不変な 4 次元 5 次曲面 **I5** を考察した。後に Freitag と Hermann は $W(E_6)$-不変 4 次元 32 次超曲面を Hermite 上半空間の Eisenstein 整数環上の離散ユニタリ群による算術商として得られるモジュラー多様体として構成した。(E. Freitag and C. F. Herman, ***Some modular varieties in low dimension***, Adv. Math., 152 (2000), 203-287). これは Hunt が考察した５次超曲面の射影双対であることが後に証明された。この様な特殊な超曲面の構成には一般論はなく散発的に存在するだけであるが、多くの研究者が興味を持ち調べている。

２．研究の目的

(1) 塩田の楕円モジュラー曲面の高次元化が得られる様にクンマー曲面の Klein モデルをテータ関数により記述する。即ち係数を Siegel モジュラー形式によって表し、Siegel モジュラー多様体上の K3－ファイブレーションを構成する。適当なコンパクト化が得られるならば、塩田の楕円モジュラー曲面 $S(4)$ の高次元化とみなす事ができ、興味深い高次元多様体の例となる。また、80 枚存在する

Rosenhainの超平面とクンマー曲線上の32本の直線を具体的に、Siegel モジュラー形式を係数として書き下す事も考える。これ等の方程式が得られたら、応用として小さな体上32本の直線が定義されたクンマー曲面の具体的な構成が期待できる。

(2) M を Sp(8,ZZ)の位数 3 の元とする。4 次の Siegel 上半空間 HH_4 の M による固定点は位数３の自己同型を有するアーベル多様体の周期となっている。この自己同型の接空間での固有値ω、ω^2 の重複度が２であるとき、固定点の集合 HH^M は２次の Hermite 上半空間と同型であり、Sp(8,ZZ)における M の中心化群Γ(M)は Eisenstein 整数環上の符号(2,2)のある Hermitian 形式 H に対するユニタリ群 U(H)と同型である。(この様な自己同型は分類されていないので, M 及び HH^M に他の共役類が存在する可能性がある。) レベル２の合同部分群Γ(M,2)による商Γ(M)/Γ(M,2)は有限体 FF_4 上のユニタリ群となり、射影化したものは位数 25920 単純群となる。この群は W(E_6)に指数２で含まれおり、従ってモジュラー多様体 HH^M / Γ(M,2) をテータ零値により超曲面として埋め込み、その像を詳しく調べる事は、Hunt や Freitag が研究した W(E_6)-不変超曲面の亜種として興味深い問題である。

３． 研究の方法

(1)種数２の代数曲線 C に対し X = Jac(C) をヤコビ多様体、π:X’→ X を 16 個の 2-tosion 点での blow-up、E_1,…E_16 をその例外因子、Θをテータ因子とする。このとき線形系|4π^*Θ - ΣE_i|は X’から５次元射影空間への２次の正則写像であり、その像はクンマー曲面と同型な(2,2,2)完全交叉となる。これは X 上に引き戻して考えると、４次のテータ奇関数による有理写像と見なせる。従って Riemann のテータ関係式を計算する事により、その像を具体的に記述出来ると考えられる。更に係数がテータ零値で与えられるならば、Siegel モジュラー多様体上のファイブレーションの構造も詳しく記述出来るので、退化ファイバーの構造も具体的に記述出来る。その為には、楕円曲線の場合の方程式(1),(2),(3),(4)の対応物が何であるかを考察することが簡明な記述をする上での鍵になると思われる。

(2) 16 個ある２次のテータ関数のテータ零値を領域 HH^M に制限する事により、5 次元射影空間への W(E_6)-同変写像を得る。この像は特殊な周期に対するテータ関数の関係式として記述可能であるが、非常に複雑な為、数式処理ソフトを用いて計算する事になる。W(E_6)の作用による対称性を用いて、超曲面の特異点や、自己同型環が大きくなるようなアーベル多様体に対応する特殊な部分多様体を調べる。

４． 研究成果

(1) ① 種数２の代数曲線 C に対しΩを周期行列、X = CC^2 / ΩZZ^2 + ZZ^2 をヤコビ多とする。有理写像Φ :X → PP^5 を 6 個ある 4 次の半整数指標付き奇テータ関数により定める：

X1=θ[01,01](2z,Ω), X2=θ[01,11](2z,Ω)
X3=θ[11,01](2z,Ω), X4=θ[10,10](2z,Ω)
X5=θ[10,11](2z,Ω), X6=θ[11,10](2z,Ω)

するとΦの像 Y は次の完全交叉として与えられる。ここで、A1,…,A10 は 10 個ある偶テータ定数である。

A10^2 X1^2 + A1^2 X4^2
    - A2^2 X5^2 - A5^2 X6^2 = 0 … (E1)
A10^2 X2^2 + A3^2 X4^2
    - A4^2 X5^2 - A8^2 X6^2 = 0 … (E2)
A10^2 X3^2 + A6^2 X4^2
    - A9^2 X5^2 - A7^2 X6^2 = 0 … (E3)

この 3 個の 2 次式が生成するネットには rank が 4 の 2 次式が 15 個存在する。係数は Veronese 埋め込みを経由して PP^3 の座標とみなすことが出来る。この 15 個の多重斉次方程式が定める PP^3×PP^5 の部分多様体は Siegel モジュラー多様体 A(2,4)=PP^3 を底空間とするクンマー曲面のファイブレーションを与える。このファイバー多様体は 5 次元の非特異多様体であり単連結、小平次元が∞であることがわかった。更に特異ファイバーも完全に記述出来た。Siegel 上半空間の対角成分に対応する 2 次曲面上では楕円曲線の直積に対応するクンマー曲面上の 8 本の直線を blow-down した曲面が一般のファイバーとなっている。この様な 2 次曲面は 10 個存在する。２つの２次曲面の交叉は 4 本の直線に分解するが、これは Siegel モジュラー多様体の１次元 cusp であり、ファイバーは一般に２つの有理曲面を既約成分に持ち、交叉は楕円曲線になっている。この直線の交点は 60 個の 0 次元 cusp であり、ファイバーは 8 枚の射影平面が八面体の配置を成す。

② A(i,j,k) = Ai Aj Ak とおく。このとき 16 個の trope の１つ D1 は以下の 4 つの超平面の交差として与えられる。

A(1,3,6)X4 + A(2,4,9)X5 + A(5,7,8)X6 =0
A(1,10,3)X3 + A(5,8,9)X5 – A(2,4,7)X6 =0
A(1,6,10)X2 + A(4,5,7)X5 – A(2,8,9)X6 =0
A(5,6,9)X1 + A(1,2,7)X3 – A(3,4,10)X6 =0

16 個の例外因子の１つ E11 は以下の 4 つの超平面の交叉として与えられる。

A(1,3,6)X4 + A(2,4,9)X5 + A(5,7,8)X6 =0

A(1,10,3)X3 + A(5,8,9)X5 – A(2,4,7)X6 =0
A(1,6,10)X2 + A(4,5,7)X5 – A(2,8,9)X6 =0
A(3,6,10)X1 + A(2,7,8)X5 – A(4,5,9)X6 =0

他の 15 個の trope と例外因子は 2-torsion 部分群による平行移動により与えられる。これは射影座標 X1,…,X6 の符号の変化により与えられる。以上の事から 32 本の直線は Siegel モジュラー多様体 A(4,8)の関数体上定義されている事が分かった。

③得られた方程式はすべて整数上定義されている。従って有限体に還元して考える事が出来る。コンピュータによる計算の結果、素数 p = 3,5,7,11,13,17 に対しては、クンマー曲面と 32 本の直線が素体 FF_p 上定義されたものは存在しない。p = 19 の場合に具体的な例を構成した。

(2) 4 次元主偏極アーベル多様体で位数 3 の自己同型を有するものをパラメタライズする4次元Picardモジュラー多様体を考察した。16 個ある 2 次のテータ関数のテータ零値を領域HH^Mに制限する事により得られる5次元射影空間への W(E_6)-同変写像の像を調べる為に、古典的なテータ関係式と計算機を用いて、次の 10 次の超曲面である事を決定した。

F = F10 - X0 X1 X2 X3 X6 X7 F4 = 0

ここで F4 と F10 は 4 次と 10 次の斉次多項式

F4 = -6 S1^2 + 16 S2 + 4 S1 X0^2 + 2 X0^4

F10 = S1 S2^2 - 3 S1^2 S3 + 12 S1 S4
- 48 S5 + (-S2^2 + 2 S1 S3 + 4 S4) X0^2
+ S3 X0^4

であり、Si=si(X1^2,…,X7^2)であり si は5個の変数の平方 X1^2,…,X7^2 の i 次基本対称式である。5 次元射影空間への W(E_6)の作用は標準表現である。これ等の基礎的な事実を示した後、W(E_6)の元の固定点を考察した。この様な点は更なる自己同型を有するアーベル多様体に対応する。これ等の自己同型を調べるために、対応する symplectic 群の元を決定する必要がある。この作業には系統的な方法は無い様に思われるが、求めるべきものはすべて決定出来た。その中の１つとして、３６個あるW(E_6)の鏡映超曲面による切断は 10 次の 3 次元多様体を与える。これは Igusa quartic **I4** の Hessian 超曲面である事が分かった。従って、Hunt の予想が肯定的に解決された事になる。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　２件）

① Bert van Geemen and Kenji Koike, ***A Picard modular 4-fold and the Weyl group W(E6)***, Communications in Analysis and Geometry （査読有） に掲載，号,頁未確定.

② Kenji Koike, ***On Jacobian Kummer surfaces***, Journal of the Mathematical Society of Japan (査読有), Vol. 66 (2014), No. 3, pp.997-1016.

〔学会発表〕（計　４件）

① Kenji Koike, ***Cyclic heptagonal curves and hypergeometric periods***, Curves, Moduli and Integrable Systems, 津田塾大学(東京都小平市), 2015 年 2 月 17 日.

② 小池健二, ***A Picard modular 4-fold and the Weyl group W(E6)***, 第 7 回玉原特殊多様体研究集会，東京大学玉原国際セミナーハウス(群馬県沼田市)，2013 年 9 月 11 日.

③ 小池健二，J***acobian Kummer surfaces of degree 8***, 第２回京都保型形式研究集会，京都大学(京都府京都市)，2013 年 6 月 14 日.

④ 小池健二，***Jacobian Kummer 曲面と 32 本の直線***, 第６回玉原特殊多様体研究集会，東京大学玉原国際セミナーハウス(群馬県沼田市)，2012 年 9 月 5 日.

６．研究組織

(1)研究代表者

小池　健二（KOIKE, Kenji）
山梨大学・総合研究部・准教授
研究者番号：２０３６２０５６

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし