様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ５ 月 ２９ 日現在

機関番号： １４３０１
研究種目： 基盤研究(C)（一般）
研究期間： 2012～2015
課題番号： ２４５４００３９

研究課題名（和文） ホッジ加群の基礎理論の改良とその更なる応用

研究課題名（英文） Improvement of the foundation of Hodge modules and their further applications

研究代表者
斉藤　盛彦（Saito, Morihiko）

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：１０１８６９６８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：混合ホッジ加群のより簡明な定義を得るとともに、ホッジ加群の理論を代数サイクル論、特異点論、ホッジ構造論、特性類論などといった代数幾何学の様々な分野において応用する事により多くの新しい結果を得た。例えばある条件を満たす斉次多項式のb-関数の根が、多項式環をこの多項式の偏微分で生成されるヤコビ・イデアルで割ってできた商環のヒルベルト数列を計算することによって求められるなどというのは、ホッジ加群の理論無しには到底考えられないものである。

研究成果の概要（英文）：We studied a better definition of mixed Hodge modules, and got many new results in various fields of algebraic geometry such as algebraic cycles, singularities, Hodge structures, characteristic classes, and so on by applying the theory of mixed Hodge modules. For instance, the roots of the b-functions of certain homogeneous polynomials can be determined by calculating the Hilbert series of the quotient ring of the polynomial ring divided by the Jacobian ideal generated by the partial derivatives of the given polynomial. This is totally impossible without using the theory of mixed Hodge modules.

研究分野： 代数幾何学

キーワード： ホッジ加群　半正定値性定理　許容法関数　b-関数　超平面配置　ヒルツェブルフ類　コンツェヴィチ複体　フロベニウス多様体

１．研究開始当初の背景

ホッジ加群の理論とは、元来ヴェイユ予想を解決する為にグロタンディックにより創始され、更にドリーニュ達によって発展させられてきたエタール混合層の理論に標数０において対応すべきものとし造られたのであったが、これらの理論はそれ自身正確な理解を得るのにかなりの時間と努力を必要とすることもあって、代数幾何における応用が十分に為されているとは必ずしも言い難い状態にある。更に悪い事には、最近の学生や若い数学者の基礎的学力の低下というのは日本だけにとどまらず全世界的な傾向が見られ、数多くの致命的な誤りを含む論文が一流学術紙を賑わせているという話も耳にするようになってきた。この原因としては学術紙の側にも全く責任の一旦がないとはいえず、目新しさやインパクトのみで掲載の可否を判断して、間違いのあった場合は著者のみの責任に帰するのではなく、以前のように証明を或る程度は丁寧に調べることが重要ではないかと言われている。更に最近は誤りがあっても訂正をだすという習慣がなくなってしまったようなので、一体何が間違っていて何が合っているのか初心者には全く良くわからない事態となっていることも十分に考えられる。これにより誤りの再生産というのも次第に現れ始めており、例えばその分野ではかなり著名な方が部分積分を誤って使った 90 年代後半の論文の間違いが、数年後に出た一流紙のこれもかなり名の知られた人達による論文において忠実に再現され、かつ結果は一般化されているという事態も起こっているそうである。これらの論文はこの著者らの仲間の間では最近は引用されない事もあるそうなのだが、何も知らない若い人達の間では更に誤りが再生産される可能性は十分に残されていそうである。そこで手軽で面白いだけではなく、出来るだけ確実で信頼できる数学というものを若い世代に残す事が重要ではないかと考えられている。またホッジ加群の基礎理論については、その再整備を行う事により更に若い人達に受け入れられ易くする事も重要ではないかと思われる。

２．研究の目的

例えば非特異代数多様体の定数層の射影的写像による順像の分解定理の証明を見てもわかるように、ホッジ加群を使うと使わないとでは、できる事に多少とも差が表れて来るものである。そこで内外の研究者たちとの討論を通じてホッジ加群の理論の代数幾何における新たなる応用を発見し、また間違った使い方を訂正するとともに、ホッジ加群の基礎理論の更なる簡易化を通してホッジ加群の普及を目指すことにあった。

３．研究の方法

内外の共同研究者たちとの討論を通じて、現在かなり興味をもたれている問題で、かつホッジ加群の理論を有効に使えそうなものを探す事が肝心となる。更にこの問題に対して、ホッジ加群の理論をどの様に適用させることが出来るかも鍵になる。具体的には様々な研究集会に参加して、個人的に議論を重ねる事によりアイデアが得られる事も多い。

４．研究成果

(1) 以前サバ氏と行ったコンツェビッチ予想の証明に関連して，かつてコンツェビッチ氏の定義したドラーム複体の部分複体が，実はベイリンソン極大拡張と呼ばれているものと一致するという事を証明した。ここでは V- フィルトレーショ

ンをステンブリンク氏の理論を用いて表すという約３０年前に見つけたアイデアがホッジ加群と並んで本質的に使われている。これは結局サバ氏達の論文の付録となった。

(2) 藤野・藤澤の両氏との共同研究では，双対化層の順像の半正定値性に関する定理の一般化及び精密化を行った。ここでは次元に関する帰納法を使う際に，ホッジ構造の変動の極限における挙動に関するカタニ・カプラン・シュミットの結果が本質的に使われている。ある古典的論文においては、彼らの結果を全く使わずに証明を与えているようであるが、これはかなり無理があるのではないかと考えられている。また，正規交差多様体の場合への拡張は，ホッジ加群の理論が非常にうまく適用される例のように思われるが、この場合には少なくとも位相的双対化層及び偏窟層の導来圏からの実現関手の理論が本質的に必要なようで、これらを全く使わずに証明を与えている論文もあるようではあるが、完全な証明には結局は同じ事を示さざるを得ないのではないかと考えられている。

(3) 許容法関数の零点の定義体に関するシャルル氏の結果に刺激を受けて，部分多様体のスプレッドの手法を用いることにより、l-進コホモコジーやガロワ群の作用を全く使わずに、その改良版を証明した。ここでは底空間上局所的には位相的に自明な代数多様体の族とその全空間上で定義された許容法関数が与えられた時に，法関数が一つのファイバー上で一定ならば他のどのファイバー上でもそうであるという事実が本質的に使われている。

(4) 上記の話をカタニ・ドリーニュ・カプランによって研究されたホッジ類となる点からできる代数部分多様体の定義体についての話に拡張しようというシュネル氏との共同研究については，予想以上にうまくいったと一応言えるのではあるが，動機のひとつとなった数年前の或る論文に関してあまり明瞭でない箇所が発見されたので，その部分を何とかしようとかなり努力した。問題の一つはホッジ類となる点の集合の連結成分と既約成分の差から来るものであったが、この点に関しては結局いかんともしがたいという結論に達した。またここでは昔のヴェイユ流の代数幾何も多少は必要ではないかという気もしたが、詳しくは時間が無いせいもあって良くはわからなかった。

(5) ディムカ氏との共同研究では，孤立特異点を持った斉次超曲面のミルナー代数とステンブリンク・スペクトルとの間のよく知られた関係を、一次元の特異点を持った斉次超曲面の場合に拡張しようと試みた。この場合には、斉次定義多項式の偏微分で定義されるコスズル複体とミルナー・コホモロジーとを結ぶ極位数スペクトル系列というのが現れるのだが、これを計算するための最初の重要な定理を証明することができた。これにより特異点が簡単な場合、例えば対応する射影超曲面が通常二重特異点しか持たない場合にはかなり計算が可能となったが、一般の場合はまだ多くの困難な問題が残っている。

(6) 上記の理論は実は射影超曲面の定義関数のb-関数の計算と密接に関係しており、多項式環を与えられた斉次多項式の偏微分で生成されるイデアルで割った商環のヒルベルト数列の始めの部分をコンピュータで計算することによって、この斉次多項式の b-関数の根が決定されうる場合がある。例えば超平面配置の b-関数

の根が組合せ不変量ではないというヴァルター氏の例などもこの方法を使って直接確かめる事が出来る。この利点は b-関数をコンピュータで計算するよりは圧倒的に早いということで、ヴァルター氏の例のようにb-関数の計算が少なくとも普通の計算機では不可能な場合でも、ヒルベルト数列の必要な部分の計算は通常は一瞬でできる。ただし上記の極位数スペクトル系列を扱わなければならないせいもあって、常に根がすべて求まるという訳ではない。また，b-関数の根の重複度に関しては，斉次多項式の b-関数の根の重複度と多項式の定める射影超曲面の孤立特異点の b-関数の根の重複度との間には或る程度の関係がある事などもだんだんと分かってきた。

(7) ヒルツェブルフ特性類に関しては，超平面配置の場合などに特に有効な公式を証明したが、それを更に精密化するために，スペクトラル・ヒルツェブルフ・ミルナー特性類というのを導入し、これがホッジ加群に対するトム・セバスチャニ定理とうまく組み合わされる事などを示した。

(8) フロベニウス多様体におけるいわゆる「再構成定理」に対する反例の可能性について、ブリースコルン加群の冪零軌道というものを導入することによって研究を行った。この定理はかなり怪しいのではないかという噂はたまに聞くことがあり、確かにそういう気はするのだが、時間が無いせいもあって決定的なところまでは行かなかった。

(9) 混合ホッジ構造の許容変動とベイリンソン関手を用いた混合ホッジ加群のより分かり易い定義を、各種条件の部分商による安定性を十分に駆使する事により得た。混合ホッジ加群の更により簡明な定義を得る為には，やはり幾何学的混合ホッジ加群の場合に話を限るしか手が無い様ではあるが，それでもまだかなりの技術的複雑さを残しているのは或る程度はやむを得ない事なのかもしれない。これはドリーニュの混合ホッジ構造の基礎理論のかなりの部分が多重フィルトレーションや多重スペクトル系列の話から成っている事からしても避けられない事の様に思われる。完全圏を使った多重スペクトル系列の議論の簡易化に関してはもっと多くの人に知ってもらうべきかもしれない。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 ３件）

(1) Saito, Morihiko; Schnell, Christian, Fields of definition of Hodge loci, in Recent Advances in Hodge Theory, London Math. Soc. Lect. Note Series 427, Cambridge University Press（査読有） 2016, pp. 275–291.

(2) Saito, Morihiko, Normal functions and spread of zero locus, in Recent Advances in Hodge Theory, London Math. Soc. Lect. Note Series 427, Cambridge University Press （査読有） 2016, pp. 264–274.

(３) Fujino, Osamu; Fujisawa, Taro; Saito, Morihiko, Some remarks on the semipositivity theorems, Publ. Res. Inst. Math. Sci. （査読有） 50 (2014), 85–112.

〔学会発表〕（計 ３件）

(１) 斉藤盛彦，Graded Koszul

cohomology and pole order spectrum (招待講演), The 1st Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities, 2013 年 9 月 18 日 , ニース（フランス）

(2) 斉藤盛彦 , On the definition of mixed Hodge modules (招待講演), Mixed Hodge Modules and Their Applications, 2013 年 8 月 20 日 , オックスフォード（イギリス）

(3) 斉藤盛彦 , Normal functions and spread of zero-locus (招待講演), Recent advances in Hodge theory: period domains, algebraic cycles, and arithmetic 2013 年 6 月 15 日 , バンクーバー（カナダ）

6．研究組織

(1) 研究代表者

斉藤　盛彦　(SAITO, Morihiko)

京都大学数理解析研究所・准教授

研究者番号： 10186968