

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 9 日現在

機関番号：16101

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540042

研究課題名(和文)代数曲線上の特殊線形系による理論と応用の研究

研究課題名(英文)Linear Systems on Algebraic Curves and its Applications

研究代表者

大淵 朗(Ohbuchi, Akira)

徳島大学・大学院ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部・教授

研究者番号：10211111

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：研究成果の概要(和文)：種数 g の非特異平面代数曲線の自己同型は、ガロア点に対応する自己同型がホモロジー型, descendantで決まる場合、あるいは例外型の三種類であることを決め、その中でガロア点に対応するのは自己同型がホモロジー型の場合かホモロジー型の自己同型を与える写像と別の被覆の合成が点射影になっている場合であることを示した。この事実に基づき点射影に対する写像のガロア閉包がある種の群のリース積で定義された群に埋め込まれることを示した。これによりガロア閉包がB型Coxeter群を含む被覆面の構成に成功した。

研究成果の概要(英文)：研究成果の概要(英文)：We prove that every automorphism of a smooth plane curve should be homology type, descendent type and exceptional types. After this, we prove that automorphism is a homology type automorphism if and only if a Galois point type or a point defined by a composition of Galois covering and another covering. When a projection is a composition of Galois covering and another covering, its Galois closure can be embedded in a wreath product of some typical groups. According these results, we can construct a Galois closure of some covering map of a smooth plane curve whose Galois group contains a Btype Coxster group.

研究分野：数学・代数学

キーワード：代数幾何 代数曲線 ブリル=ネーター理論 線形系 自己同型群

1. 研究開始当初の背景

この研究は平成 24 年度から三年間に渡って科学研究費補助金を得て行なわれた。

本研究は代数曲線を多方面からの研究・意見交換が目的である。そのため、

- (1) 特殊線形系と代数曲線族の理論
- (2) ワイアシュトラス半群の研究
- (3) 代数曲線の自己同型群
- (4) ガロア点
- (5) 代数曲線符号・暗号の理論
- (6) 研究集会を開催

このようなことを目的とした。

完備な一次元代数多様体を一般には代数曲線と呼ぶが、この代数曲線は幾何学的にはコンパクト一次元複素多様体と見なすことが出来、研究対象としては或る意味で非常に扱いやすいものである。そのため、代数幾何学に限らずいろいろな分野、例えば函数論、射影幾何学、可換環論、整数論、或いは情報理論など多岐に渡って古くから応用されている。しかしその扱われる歴史が長いということもあり、それぞれの、例えば函数論、射影幾何学、可換環論、などで開拓されてきたテクニックはもう少し改良されていく事も望ましい、というも否めない事実である。面白いことに、こういった様々な分野では、代数曲線は同値な概念であるにもかかわらず、その分野固有の考え方で取り扱うため随分異なった常識で取り扱われて居り、新鮮なアイデアに満ちているのであるが、それにもかかわらず意外に他分野に於ける代数曲線の取り扱い方方には関心が払われることが少ない。

代表者はセヴェリ予想に関連した代数曲線上の特殊線形系の族のなす多様体に関する研究やワイアシュトラス点の研究を主に扱ってきたが、先に述べたような事情もあり、代表者が従来行ってきた固有のテクニックや考え方に固執するのではなく更に広い視点に立った考察する必要性を強く感じている。

そのため、代数曲線の様々な分野に於ける応用や逆に他分野からの応用の可能性などを見るために、三年に渡って代数曲線を中心のテーマに据えた研究集会を行ってきた。

研究スタッフについて 山口大学の加藤崇雄名誉教授が研究する一変数複素関数論の理論、神奈川工科大学の米田二良教授の研究するワイアシュトラス半群の理論或いは神奈川大学の本間正明教授の研究する符号理論は代数曲線論の重要なテーマの一つである。更に代数曲線のガロア点および自己同型に関する研究者である宇部高専の三浦敬准教授と長岡高専（現在は新潟大学）の高橋剛准教授をスタッフに迎えた。

2. 研究の目的

本研究は代数曲線についての詳細な研究をなるべく広範囲に渡って整えるのが本研究の目的である。

(1) 特殊線形系と代数曲線族の理論：通常は代数曲線の平面結節モデルを与えるとその代数曲線の一次元特殊線形系の最低次数即ちゴナリティーは一定である例が非常に多い。この事により平面結節モデルはゴナリティーに非常に関連性が高いと考えられていたが、実は最近その反例が見つかっている。そこで指定された結節点を持つ平面結節モデルを持つ代数曲線族のどのような性質が超楕円曲線と非超楕円曲線を区別するのかの解明を目指した。

(2) ワイアシュトラス半群の研究：代数曲線上の点で特殊な重複度の極を持つ代数曲線上の函数が存在する点（ワイアシュトラス点）の研究で、そのワイアシュトラス点は、その点での可能な極の重複度の値の集合である半群で計算される。そのため、ワイアシュトラス点の研究を純粋に数値的な半群の理論と見ることが出来る。しかし、この数値的半群は必ずしも全てワイアシュトラス点から定義される半群にはならないのでワイエルシュトラス半群の数値半群の中での特徴づけが重要である。数値半群がワイエルシュトラス半群でない例の構成は種数が低い場合は極めて困難な未解決問題であるが数値半群に或る条件を付けて、ワイエルシュトラス半群としての条件を見る事を行った。

(3) 代数曲線の自己同型群：一般には自己同型を持つ曲線の場合非常に複雑な構造の群が自己同型群として与えられる例もあるので、本研究ではその自己同型群の方程式による具体的構成を目指した。手法としては非特異平面曲線の自己同型の決定を行い、更に特異点付きの平面曲線の自己同型の決定を目指すという目標で研究を行った。

(4) ガロア点：ガロア点とは新潟大学の吉原久夫教授により定義された概念で、射影空間の特異点があっても良い代数曲線の上の点または線形空間からの射影がガロア被覆を与えるような点のことである。一般には代数曲線が非特異平面曲線であった場合にこのような点は非常に少なく、またガロア群も簡単なものばかりになる。手法としては吉原久夫教授による非特異平面曲線の自己同型が平面へ拡張されるという難波の定理に基づく事実を使った計算方法が主たる方法である。本研究では射影平面をログ・デル・ペッツォ曲面に拡張して研究する、或はガロア点にならない一般の射影から出来る被覆に対するガロア閉包を求めるなどの一般化を目標とした。

(5)代数曲線符号・暗号の理論：代数曲線の詳細な情報から極めて特殊な性質を持った有理関数が存在する代数曲線の構成が可能になるが、このような特殊な曲線は符号理論や暗号理論でも大変有理な具体例（効率の良い符号や暗号の具体例）を与えてくれることを受けて、特殊線形系問題の応用としての符号、暗号の構成などを申請期間内に行うことを目標とした。

(6)研究集会を開催：代数曲線を幅広く扱う事を研究の目的とするため、その新しいテクニックの開発、研究成果の発表、及び情報収集の場を設けるため研究成果発表や情報交換などを行う場としての研究集会を計画した。

3. 研究の方法

(1)特殊線形系と代数曲線族の理論：指定された結節点を持つ平面結節モデルを持つ代数曲線族のどのような性質が超楕円曲線と非超楕円曲線を区別するのかを目指した。

(2)ワイアシュトラス点半群の研究：数値半群が代数曲線の二重被覆である曲線のワイエルシュトラス半群になるかどうかの判定条件についてを研究を行うと言う方法を目指した。具体的な手法としては Torres の手法の拡張を目指した。

(3)代数曲線の自己同型群：非特異平面代数曲線の自己同型群の完全な決定を定義方程式の立場から目指した。またその拡張として特異点を幾つか許す場合にも決定を目指した。

(4)ガロア点：重み付き射影平面に含まれ、ガロア点が存在する代数曲線はその埋め込みが一意的であることを受けてこの定理をランク1のゴレンスタイン ログ・デルペッゾ曲面で確かめることを目指した。また一般の平面曲線の点からの射影にのガロア閉包の計算方法の確立を目指した。

(5)代数曲線符号・暗号の理論：良い条件（符号長が短く、複合率が高いなどの条件）を満たす符号ないし暗号を正標数の代数曲線上に構成することを目標とした。特にマシュー群を基に射影幾何的に代数曲線符号の構成を試みた。

(6)研究集会を開催する：平成24年度に第10回代数曲線論シンポジウム、平成25年度に第11回代数曲線論シンポジウム、平成26年度に第12回代数曲線論シンポジウムを組織委員を計画した。

4. 研究成果

代表者は第10回代数曲線論シンポジウムを日本大学にて2012年12月15日(土) --

12月16日(日)に、第11回代数曲線論シンポジウムを首都大学東京にて2013年12月21日(土) -- 12月23日(月)に、また第12回代数曲線論シンポジウムを日本大学にて2014年12月20日(土) -- 12月21日(日)に開催した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

Akira Ohbuchi and Jiryo Komeda
The Weierstrass Semigroups on Double Cover of genus Two Curves, *Tokyo Journal of Mathematics*, in press (2014) **査読有**

Akira Ohbuchi, Miura, Kei,
Automorphism group of plane curve computed by Galois points, *Contributions to Algebra and Geometry*, in press (2014) **査読有**

Akira Ohbuchi, Jiryo Komeda
Weierstrass gap sequences at points of curves on some rational surfaces. *Tsukuba J. Math.* 36 (2013), no. 2, 217-233. **査読有**

Akira Ohbuchi, Takeshi Harui
On the number of pencils of minimal degree on curves with small gonality. *JP J. Geom. Topol.* 10 (2012), no. 3, 191-229. **査読有**

[学会発表](計2件)

Akira Ohbuchi ガロア点と自己同型について, (Galois point and automorphism group of an algebraic curve) 2014年3月27日「代数幾何ミニ研究集会」報告集, 埼玉大学理学部一号館(さいたま市桜区下大久保255), 1-10頁

Akira Ohbuchi 代数曲線とクリフォード指数について, (On the Clifford index of an algebraic curve) 2013年8月22日京都大学数理解析研究所(京都市左京区北白川追分町)「代数学シンポジウム」報告集, 1-23頁

6. 研究組織

(1)研究代表者

大淵 朗 (OHBUCHI Akira)
徳島大学・大学院ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部・教授
研究者番号：10211111

(2)研究分担者

加藤 崇雄 (KATO Takao)
山口大学・理学部・名誉教授
研究者番号：10016157

(3)連携研究者

米田 二良 (KOMEDA Jiryo)
神奈川工科大学・工学部・教授
研究者番号：90162065

本間 正明 (HOMMA Masaaki)
神奈川大学・工学部・教授
研究者番号：80145523

三浦 敬 (MIURA Kei)
宇部工業高等専門学校・一般科・准教授
研究者番号：50353321

高橋 剛 (TAKAHASHI Takeshi)
新潟大学・工学部・准教授
研究者番号：60390431