

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 8 月 4 日現在

機関番号：16401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24540044

研究課題名(和文)非可換代数幾何学の大域的な問題の研究

研究課題名(英文)global problems on non-commutative algebraic geometry

研究代表者

土基 善文(Tsujimoto, Yoshifumi)

高知大学・教育研究部自然科学系理学部門・准教授

研究者番号：10271090

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：非可換代数幾何学について、正標数の還元を通じて理解することにより通常の代数幾何学による手法を適用可能にした。非可換代数幾何学的な問題を整理し、非可換代数多様体の定義そのものや正則性について、ひとつのあり方を提起した。
非可換射影多様体と、その上の微分形式の理論の非可換化について、定義をし、そのコホモロジーの計算法の道筋をつけた。

研究成果の概要(英文)：Regarding non-commutative algebraic geometry, we can apply ordinary algebraic geometry method by understanding through reduction to the positive characteristics. We organized the geometric problems, raised one way of thinking about the definition itself and regularity of non-commutative varieties.
I defined the non-commutative projective space and a version of the theory of differential forms on it, and set the pathway of calculating its cohomology.

研究分野：代数学

キーワード：非可換代数幾何学 非可換環論 ワイル環

1. 研究開始当初の背景

非可換幾何学は量子現象を記述するための基本であり、現実の量子世界(非可換世界)はその「影」として可換世界を持つ。可換世界が豊富な研究材料を持つことは歴史的な事実ではあるが、それに対応するだけの非可換幾何学的な素材が存在するはずである。そこで本研究ではそのような素材をできるだけたくさん発見すべく、非可換代数多様体を一般的に構成することに取り組んだ。また、非可換幾何学の基本的な素材である Weyl 環の挙動は、Jacobian 問題の解決へ向けての一つの重要なヒントを与えており、その研究は大切であると言える。

非可換幾何学の題材はつぎのように D-加群、表現論、数論の各分野と密接に結びついている。

まず、Weyl 環を貼りあわせてできる非可換多様体上の層は局所的には D-加群と見ることができ、D-加群の様々な理論は非可換多様体上の層の理論と結びつけて考えることができる。

つぎに、代数群の表現論、とくに不変微分の全体のなす環の理論は非可換代数幾何学と著しい共通点を持ち、例題としても大事である。

最後に、非可換代数幾何学で困難のもととなる環の単純性は、正標数まで還元することで著しく簡易化し、可換代数幾何学で扱いやすい対象を生み出す。

そこで、本研究ではそのような分野を視野に入れ、互いに影響を受けつつ進むことが大事であると考え、各分野の先生方の協力を仰ぎながら研究を行うこととした。

2. 研究の目的

(1) 非可換代数幾何学を、目に見えるように扱えるようにし、非可換代数多様体を定義、一般論を展開する。

(2) 非可換代数幾何学に起こる現象を観察し、可換代数幾何学と比較できるぐらいに分析する。

(3) 非可換代数幾何学から可換な代数幾何学を始めとする既存の理論にインパクトを与える。

3. 研究の方法

既存の理論の成果を睨みながら、非可換代数学の正標数への還元、超フィルタをもちいた標数 0 への回帰をもちいて結論を得る。そのさい、導来圏の理論のようなホモロジー的な技法を用いる。

4. 研究成果

非可換代数多様体を、「正標数まで還元すれば通常の代数多様体上の代数そうであるようなもの」として定義する。

そのとき、Auslander 正則性を正則性の基準の一つとして用いるのが有効であることがわかった。それをもちいて

非可換射影空間の一つの定義が得られたが、

これはあらたな素材、すなわち「複素」的な扱いを強く示唆していた。

そこで「複素」非可換多様体を、ケーラー多様体の非可換対応物というアイデアを実現することで定義し、とくに「複素」非可換射影空間と、その上のドルボー複体を定義することに成功した。

得られたドルボー複体は通常のものの非可換アナログと考えられ、現在解析中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 11 件)

1. Takuro Mochizuki

Asymptotic behaviour of certain families of harmonic bundles on Riemann surfaces, *Journal of Topology*, 9, 2016, 1021-1073, 査読有, doi:10.1112/jtopol/jtw018

2. Ishii, Akira, Ueda, Kazushi, Dimer models and crepant resolutions. *Hokkaido Math. J.* 45 (2016), no. 1, 1-42, 査読有

3. Yoshifumi Tsuchimoto, Dolbeault complex of non-commutative projective varieties, 代数幾何学城崎シンポジウム報告集, 2015 年度版, 査読無, 2-15, 585 - 609

4. Ishii, Akira, Ueda, Kazushi, Dimer models and the special McKay correspondence, *Geom. Topol.* 19 (2015), no. 6, 3405-3466. 査読有

5. Ishii, Akira, Ueda, Kazushi, The special McKay correspondence and exceptional collections, *Tohoku Math. J.* (2) 67 (2015), no. 4, 585-609. 査読有

6. Mochizuki, Takuro, Asymptotic behaviour and the Nahm transform of doubly periodic instantons with square integrable curvature. *Geom. Topol.* 18 (2014), no. 5, 2823-2949. 査読有

7. Mochizuki, Takuro, Harmonic bundles and Toda lattices w opposite sign II. *Comm. Math. Phys.* 328 (2014), no. 3, 1159-1198, 査読有

8. 菊地 克彦, ある Gelfand 対の球表現, 「表現論および表現論の関連する諸分野の発展」, 1877, 京都大学数理解析研究所講究録 (2014), 50-69, 査読無

9. Ishii, Akira; Ito, Yukari; Nolla de Celis, Álvaro On GN-Hilb of N-Hilb. *Kyoto J. Math.*

53 (2013), no. 1, 91-130. 査読有

10. Ishii, Akira; Ueda, Kazushi A note on derived categories of Fermat varieties. Derived categories in algebraic geometry, 103-110, EMS er. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2012. 査読有

11. Tomonari Dotera, Masakiyo Kimoto, Junichi Matsuzawa, Hard spheres on the gyroid surface, 2012, 575-581 doi:10.1098/rsfs.2011.0092, 査読有

[学会発表](計 42 件)

1. Yoshifumi Tsuchimoto,

非可換ケーラー多様体としての非可換射影多様体の様子について, 関西大学システム理工学部数学科, 2016 年 09 月 18 日

2. Yoshifumi Tsuchimoto,

Non commutative complex projective varieties,
日本数学会年会, 首都大学東京南大沢キャンパス, 2017 年 03 月 26 日

3. Akira Ishii,

Introduction to the McKay correspondence and Artin-Verdier theory,
Non-commutative crepant resolutions, Ulrich modules and generalizations of the McKay correspondence,
2016 年 6 月 13 日,
京都大学数理解析研究所

4. Akira Ishii,

Dimer models with group action,
Categorical and analytic invariants in Algebraic geometry,
2016 年 09 月 12 日,

Higher School of Economics,
Moscow(ロシア)

5. Akira Ishii,

G-constellations and the maximal resolution of a quotient surface singularity,
Moduli spaces of sheaves and related topics,
2017 年 2 月 1 日, 京都大学数理解析研究所

6. Takuro Mochizuki,

Asymptotic behaviour of certain families of harmonic bundles on Riemann surfaces,
Flat connections, Higgs bundles and Painleve equations,
2016 年 5 月 1 日,
National Taiwan University(台湾)

7. Takuro Mochizuki,

Mixed twistor D-modules and some examples I, II,
D-modules and Hodge theory,
2017 年 1 月 23 日, 1 月 25 日,
IPMU(千葉県)

8. Takuro Mochizuki,

A Hukuhara-Levelt-Turrittin type theorem,
Complex Analytic Geometry,
2017 年 3 月 28 日,
Tata 研究所(インド・ムンバイ)

9. Takuro Mochizuki Quantum

\mathcal{D} -modules and mixed twistor \mathcal{D} -modules, IHES におけるセミナー,
2015 年 04 月 16 日,
IHES(フランス)

10. 土基 善文 Dolbeault complex of non-commutative projective varieties, 城崎代数幾何学シンポジウム, 2015年10月20日, 兵庫県城崎市

(4)研究協力者
なし

11. 菊地 克彦,
「ある Gelfand 対に対する球表現」,
日本数学会秋季総合分科会,
愛媛大学, 2013 年
[図書](計 2 件)

1. Takuro Mochizuki, Mixed Twistor D-module, Springer-Verlag(Lecture Notes in Mathematics, vol.2125), 2015, xx+487 ページ

2. Takuro Mochizuki, Holonomic D-modules with Betti structure, フランス数学会, 2014, viii+205 pp.

[産業財産権]
出願状況(計 0 件)
取得状況(計 0 件)

[その他]
ホームページ等
<http://www.math.kochi-u.ac.jp/docky/>
<http://www.dailymotion.com/tsuchimoto-y>

6. 研究組織
(1)研究代表者
土基善文 (TSUCHIMOTO Yoshifumi)
高知大学・教育研究部自然科学系・准教授
研究者番号: 10271090

(2)研究分担者
松澤 淳一 (MATSUZAWA Jun-ichi)
奈良女子大学・自然科学系・教授
研究者番号: 00212217
石井 亮 (ISHII Akira)
広島大学・理学研究院・教授
研究者番号: 10252420
吉富 賢太郎 (YOSHITOMI Kentarou)
大阪府立大学・高等教育推進機構 准教授
研究者番号: 10305609
菊地 克彦 (Kikuchi Katsuhiko)
京都大学・理学研究科 助教
研究者番号: 50283586

(3)連携研究者
望月 拓郎 (Mochizuki Takuro)
京都大学・数理解析研究所, 教授
研究者番号: 1031971