様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 28 年　6 月 19 日現在

機関番号：22604
研究種目：基盤研究(C)(一般)
研究期間：2012～2015
課題番号：24540045

研究課題名（和文）モジュライ空間の幾何学と位相的場の理論への応用

研究課題名（英文）Geometry of moduli spaces and application to topological field theory

研究代表者
上野　健爾（Ueno, Kenji）

首都大学東京・理工学研究科・客員教授

研究者番号：40011655

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　4,000,000円

研究成果の概要（和文）：共形場理論を使ってモジュラー函手をJ.E. Andersenとの共同研究で構成していたが、ゲージ群がsl(n,C)の場合にこのモジュラー函手から構成される位相的場の理論(3次元多様体の不変量)はReshetikhin-Turaevが構成していた位相的場の理論を一致することを証明した。さらに共形場理論で構成される射影的平坦接続がHitchinが構成した射影的平坦接続と一つの例外を除いて一致することが証明されていたが、証明されいなかったsl(2,C)レベル1の場合に証明を完成した。
また、標数p>0の場合に種数2の退化の図形 F を有する重複ファイバ ー pF の構成を行った。

研究成果の概要（英文）：With J. E. Andersen from conformal field theory I constructed modular functors, which give invariants of 3-manifolds. When the gauge group is sl(n,C) we proved that the invariants of 3-manifolds are the same to the those constructed by Reshetikhin and Turaev. We also show that the projectively flat connection of the conformal field theory coincides with the one defined by Hitchin when the gauge group is sl(2,C) and level 1. This was the only exceptional case that the isomorphism was not known.
Also in characteristic p >0 multiple fibers pF whose underling configurations F are degenerations of curves of genus 2 were constructed.

研究分野：複素多様体論

キーワード：共形場理論　位相的場の理論　モジュライ空間　不変量　射影的平坦続　閉リーマン面　代数曲線　重複ファイバー

１．研究開始当初の背景

複素単純リー代数をゲージ群に持つ共形場理論は，任意種数の点付き閉リーマン面上に Tsuchiya-Ueno-Yamada によって構成されていた(A. Tsuchiya, K. Ueno & Y. Yamada: Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries, Adv. Stud. Pure Math.,19(1989), 459-565). このとき点付き閉リーマン面上に構成される共形場ブロックは点付き閉リーマン面のモジュライ空間上の複素ベクトル束(共形場ブロック束)となるだけでなく，射影的平坦接続(WZW 接続)を持っている．特に種数 0 の場合は Knizhnik-Zamolodchikov 方程式として表すことができる．この接続が平坦であれば，モジュライ空間上の平坦な切断の全体を取ることによって点の個数と種数のみに依存する複素ベクトル空間を得ることができる．種数が 0 の場合は平坦接続であるが，種数が 1 以上では平坦ではない．そこで，アーベル的共形場ブロック束とのテンソル積（正確にはアーベル的共形場ブロック束の分数ベキを取る必要がある）を取ることによって，平坦接続を得ることができ，平坦切断がなすベクトル空間を考えつことによってモジュラー函手を得ることができることが証明されていた (J.E. Andersen & K. Ueno: Geometric construction of modular functors from conformal field theory, Journal of Knot theory and its Ramifications, Vol.16(2007), 127-202). モジュラー函手は点付き閉リーマン面と各点にリー代数の表現を付随させてできる圏から有限次ベクトル空間への函手であり，いくつかの基本的な性質を満たさなければならない．モジュラー函手が得られるとそれから位相的場の理論(3 次元多様体の不変量)を一意的に構成することができる．逆に位相的場の理論から一意的にモジュラー函手が構成できる．Reshetikhin-Turaev は量子群をつかって sl(2,C)に対応する位相的場の理論を構成し、さらに sl(n,C)の場合に一般化した．その後、Reshetikhin-Turaev の位相的場の理論はさまざまな形で再構成されていた．

一方，共形場理論ではモジュライ空間上に共形場ブロックがなすベクトル束ができ，その上には射影的平坦接続(WZW 接続)が構成できる．一方 Hitchin は複素安定ベクトル束のモジュライ理論をつかって，閉リーマン面のモジュライ空間上に構成できるベクトル束上に射影的平坦接続(Hitchin 接続)を導入した．二つの接続はゲージ群が sl(2,C)かつレベル 1 の場合を除いて一致することを Laszlo が示した(Laszlo: Hitchin 's and WZW connections are the same, J. Diff. Geom. 49 (1998), 547-576)．除外された場合は階数 2 のベクトル束のモジュライ空間の中で準安定束のなす部分多様体が余次元 1 となり，Hitchin の本来の定義が適用できないが，
van Geemen-de Jong は Hitchin の構成法を拡張してこの例外の場合も Hitchin 接続を構成した (B. van Geemen & A.J. de Jong: On Hitchin's connection, J. AMS., 11(1998), 189--228). この接続と WZW 接続が一致することを示すことは理論の青銅製の上からも重要なことである．

一方、以上の理論とは別に，モジュライ空間の幾何学と関連して代数曲線の退化で正標数の重複ファイバーの研究は種数 1 の場合を除いてほとんど進展していなかった．

２．研究の目的

Andersen-Ueno が構成したモジュラー函手に対応する位相的場の理論が既存の理論とどう関係するかは興味ある問題であり、本研究ではそのことを中心課題に取り上げた．ゲージ群が sl(n,C)の共形場理論から構成されるモジュラー函手の場合は Reshetikhin-Turaev の位相的場の理論と同型であろうというのが当初から予想されており，不完全な形での証明を与えることは簡単であるが，見通しのよい厳密な証明を得ることが主要な目的とする．

また共形場ブロックの射影的平坦接続に関しては残された例外の場合，sl(2,C)かつレベル 1 の場合に二つの接続が一致するかを考察する．さらにモジュライの問題で興味のある正標数の場合の代数曲線の退化で重複ファイバーについて考察する．これらの研究によって，モジュライ空間が数学の異なる場面で重要な働きをしていることがさらに明確になる．

３．研究の方法

モジュラー函手はどこまでの種数を考えれば決定できるかを考察する．また，Reshetikhin-Turaev の位相的場の理論に対応するモジュラー函手の構成法としては Blanchet によるスケイン理論を使い，ゲージ群が sl(n,C)の共形場理論のモノドロミー表現から生じる Hecke 代数の表現との関係を調べ，異なる方法で構成されたモジュラー函手の同型を表言論的な立場から見直す．

射影的平坦接続に関しては従来はレベル 1 の場合しか考察されていないアーベル的共形場理論を構成し，特にレベル 2 のアーベル的共形場理論を sl(2,C)をゲージ群に持つ共形場理論との関係を調べる．

重複ファイバーに関しては，従来は退化する曲線の種数を決めて議論していたが，本研究では立場を逆転して退化図形 F が与えられたときに，標数 p の体上で重複度 p の重複ファイバーpF が代数曲線の退化として現れるかを考察する．F としては種数 2 の退化図形を考え，具体的に代数曲線の族を構成することによって重複ファイバーの存在を示す．

４．研究成果

Andersen との共同研究で Andersen-Ueno のモジュラー函手は種数 0 の場合のデータが等しければ常に同型なモジュラー函手であることを示し

(J.E. Andersen ¥& K. Ueno: Modular functors are determined by their genus zero data, J. of QuantumTopology, Vol. 3(2012), 255 - 291), 種数 0 の場合のデータを調べればよいことを確立した.
また、Reshetikhin-Turaev の位相的場の理論に対応するモジュラー函手の構成法としては Blanchet によるスケイン理論をつかった構成法(C. Blanchet: Hecke algebras, modular categories and 3-manifolds quantum invariants, Topology 39(2000), 193-223)を採用し，sl(N,C) レベル K の表現に対応する Blanchet のモジュラー函手を V(K,SU(N))と記し，TUY 共形場理論から構成されるモジュラー函手をV(N,K)記す．このときに函手の同型 I{N,K}: V(K,SU(N))≅ V(N,K)をリーマン球面の各点に付随させる表現が簡単な場合から段階的に構成していく.そのために無限Hecke環のGNS構成法を使い，Blanchet の構成をGNS構成法の観点から書き直した．共形場理論ではリーマン球面上の n 点に sl(N,C)のベクトル表現を付随させ，無限遠点のみ一般の表現を付随させたときの共形場ブロックのモノドロミー表現は Hecke 環の表現を引き起こす．Kanie によって Hecke 環の表現が詳しく計算されている(K. Kanie: Conformal field theory and the braid group, Bulletin Fac. Edu. Mie Univ. 40(1989), 1-43).
この二つの結果を併せて考察することによって，まずリーマン球面上の n 点に sl(N,C)のベクトル表現を対応させ，無限遠点のみ一般の表現を付随させた場合に二つのモジュラー函手は同型になることが示される．さらに底空間の閉リーマン面が退化する場合の共形場ブロックの分解定理を使うことによって，一般の表現を各点に対応させる場合も同型を導くことができる．重要なのはこの同型が全体として矛盾なく整合的に定められることで、証明の核心はこの部分にある.

以上の考察はゲージ群が他の複素単純リー代数の場合に定義されるモジュラー函手に対しても拡張可能である．ただし，モジュラー函手の性質の研究にはリーマン球面の n 点にベクトル表現を対応させたときの共形場ブロックのモノドロミー表現の性質の具体的な表示が重要になる．残念ながら、モノドロミー表現の詳細は今後の研究課題として残された.

共形場理論ではモジュライ空間上に共形場ブロックがなすベクトル束ができ，その上には射影的平坦接続(WZW 接続)が構成できる．一方 Hitchin は複素安定ベクトル束のモジュライ理論をつかって，閉リーマン面のモジュライ空間上に構成できるベクトル束上に射影的平坦接続(Hitchin 接続)を導入した．二つの接続はゲージ群が sl(2,C)かつレベル 1 の場合を除いて一致することを Laszlo が示した(Laszlo: Hitchin ’s and WZW connections are the same, J. Diff. Geom. 49 (1998)， 547-576)．除外された場合は階数 2 のベクトル束のモジュライ空間の中で準安定束のなす部分多様体が余次元 1 となり，Hitchin の本来の定義が適用できないが，van Geemen-de Jong は Hitchin の構成法を拡張してこの例外の場合も Hitchin 接続を構成した(B. van Geemen & A.J. de Jong: On Hitchin's connection, J. AMS., 11(1998), 189--228). Andersen との共同研究ではこの例外の場合を取り上げ，WZW 接続は Hitchin 接続と一致することを示した．この証明のために一般レベルのアーベル的共形場理論を構成し，レベル 2 のアーベル的共形場理論と sl(2,C)レベル 1 の共形場理論とが同型になることを示し，そのことから二つの接続が一致することを示した．一般レベルのアーベル的共形場理論はテータ函数と関係し，今後さまざまな応用が期待できることも併せて強調しておきたい.

所で，代数曲線のモジュライ空間の境界には安定曲線が対応するが，代数曲線の族 p: : S →W を考えると，さまざまな形の退化した曲線が現れる．特に dim W=1, S が 2 次元代数多様体の場合は，退化する曲線が現れる点 Q ∈ W に対して点 Q の逆像　をS 上の因子と考えることができる．それを Σ_{j=1}^s n_j C_j と記し， n_1, n_2，…，n_s の最大公約数 m が 2 以上の場合に重複ファイバーと呼ぶ．この場合因子は mF と書くことができる．複素数体上の場合，重複ファイバーが現れるのは既約因子 C_j の和集合 ∪_{j=1}^s C_j が位相空間として単連結でない場合に限ることが簡単に示される．複素数体上では単連結の退化図形も正標数では単連結ではないので，重複ファイバーが現れる可能性がある.

一方，退化の図形は因子としては重複ファイバーを除けば 標数 0 と標数 p の場合は同じものが現れる．しかしながら，正標数の場合、重複ファイバーに関して標数 0 の場合と著しく異なる現象が生じ，標数 0 では存在しない重複ファイバーが存在する。本研究では種数 2 の曲線のすべての退化図形 F に対して 標数 p の退化として重複ファイバー pF が存在することを示した。存在証明は具体的に重複ファイバーを持つ代数曲線の族を構成することによって示される．その基本にあるのは曲線の退化は安定曲線への退化および曲線の自己同型と対応しているという事実である.

この構成法は，混標数，一般ファイバーが標数 0，特ファイバーが標数 p の場合にも拡張することができる.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　2　件）
1. J. E. Andersen & Kenji Ueno: Construction

of the Witten-Reshetikhin-Turaev TQFT from conformal field theory, Invet. Math., 査読有,201, 2015, 519-559
DOI: 0.1007/s00222-014-0555-7

2. J.E. Andersen & K. Ueno: Modular functors are determined by their genus zero data, J. of Quantum Topology, 査読有, 3, 2012, 255－291.

〔学会発表〕（計 6 件）
1. 第 11 回代数・解析・幾何学セミナー（招待講演），2016 年 02 月 16 日,上野　健爾, Abelian conformal field theory and sl(2,C) conformal field theory, 鹿児島大学理学部
2. 2. Various Aspects of Algebraic Geometry（招待講演）（国際学会）2015 年 12 月 12 日, Kenji Ueno , Abelian conformal field theory and sl(2,C) conformal field theory, 国際基督教大学理学部
3. 2nd Japan-Nepal Joint Workshop Around Coding theory, Dynamical systems and related topics（招待講演）（国際学会）2015 年 11 月 23 日，Kenji Ueno, Riemann surfaces and conformal field theory, Tribhuvan University, Katmandu, Nepal.
4. The 4th South Kyushu workshop on algebra - Complex Ball Quotients and Related Topics－（招待講演）上野　健爾,Conformal field theory and topological quantum field theory, 2014 年 7 月 23 日, 熊本大学
5. Seminar of Center for Quantum Geometry of Moduli Spaces, Aarhus University.（招待講演）Kenji Ueno, On two descriptions of conformal blocks, 2104 年 6 月 5, 6 日, Aarhus University.
6. Workshop "Around higher-dimensional complex systems"（招待講演）On closed Riemann surfaces,（国際学会)2014 年 3 月 11 日～3 月 13 日, Kenji Ueno, On caompact Riemann surfaces,Tribhuvan University, Katmandu, Nepal.

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6．研究組織
(1)研究代表者
上野　健爾（UENO, Kenji）
首都大学東京 理工学研究科 客員教授
研究者番号：40011655

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：