

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 22 日現在

機関番号：31302

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540048

研究課題名(和文) オービフォールド符号数の特異点並びに特異ファイバーへの応用

研究課題名(英文) Application of orbifold signature to singularities and singular fibers

研究代表者

足利 正 (Ashikaga, Tadashi)

東北学院大学・工学部・教授

研究者番号：90125203

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)： 第一に、高次元デデキンド和のザギエ相互律を、与えられた整数の組に関するより広い条件のもとに拡張した。我々の方法は幾何学的なもので、巡回商特異点どおしの不変量の比較公式がその相互律を与える。その際、非孤立固定点跡を持つ場合のオービフォールド符号数定理が本質的に用いられる。

第二に、古典デデキンド和を連分数を用いて表すマイヤースンの公式を以下の形に拡張した。まず巡回商特異点の藤木解消を岡のトーリック双有理写像の合成により解釈し、その中から高次元連分数の概念を抽出した。それを用い、重みのない3次元フーリエデデキンド和を、この連分数を用いて表した。

研究成果の概要(英文)： First we generalized Zagier's reciprocity for higher-dimensional Dedekind sum to the case where the given integers satisfy weaker conditions. Our method is geometrical in the sense that the comparison of the invariants of several cyclic quotient singularities induce the reciprocity. The main tool of the proof is the orbifold signature theorem with non-isolated fixed points locus.

Second, we extended Myerson-Holzappel formula which expresses the classical Dedekind sum by means of continued fraction as follows: We define the notion of higher-dimensional continued fraction whose algorithm corresponds to the toric resolution process of Fujiki-Oka for cyclic quotient singularities. Then we expressed the three-dimensional Fourier-Dedekind sum with weight zero by means of this continued fraction. As a tool of the proof, we slightly extend the observation of Pommersheim for the Chow ring of simplicial toric varieties.

研究分野：代数幾何

キーワード：特異点 符号数 デデキンド和 トーリック幾何 連分数 オービフォールド 特異ファイバー 相互律

1. 研究開始当初の背景

まず特異点の問題については、巡回商特異点の解消プロセスの構成という点からは藤木明の研究があるが、連分数アルゴリズムとの関係はまだ不明であったように思う。

高次元 Dedekind 和の Zagier 相互律の拡張は数論及び組み合わせ論の立場から Beck, Bayad, 浜畑芳紀等をはじめ多くがあるが、代数幾何とトポロジーの方法を本格的に組み合わせた方法はまだ見られなかったように思う。

曲線族のファイバー芽の局所不変量については、マイヤー関数を用いる Atiyah, 松本幸夫, 遠藤久顕, 久野雄介, 2 重被覆を用いる 堀川穎二, 荒川達也-足利, 相対標準環を用いる Reid, 今野一宏, テータ関数を用いる上野健爾, 吉川謙一等をはじめ多くのアプローチが知られているが、モノドロミーとモジュライ写像の関係を深く調べつつこれに迫ることは今後託されているように思う。

以上を背景として、次の欄に示す我々の方法によってこの方面を発展させようとしたのが研究開始当初の状況である。

2. 研究の目的

オービフォールド符号数の解析を通じて、巡回商特異点間にある数論的背景を持つ双対性を確立すること、並びに代数曲線族の特異ファイバー芽の符号不足数をモジュライ写像の特性と関連させつつ探求することを目的とし、特に以下の4点を掲げた。

- (1) 一般次元孤立巡回商特異点のトーリック特異点解消を統制する高次元連分数の概念の確立
- (2) 非孤立固定点に対する Lefschetz 固定点定理の応用による Dedekind 和の拡張概念の抽出と Zagier 相互律の拡張
- (3) 安定還元後の中心安定ファイバーへの自己同型と退化ファイバーの幾何の関係
- (4) 低種数のファイバー芽の局所符号数並びに Horikawa 指数による分類

3. 研究の方法

(1)(2) については Oka によるトーリック双有理写像を基本とし、Pommersheim が示した Chow 環の変動項の記述を拡張して考察した。また非孤立固定点跡を持つ場合のオービフォールド符号数定理を応用した。

(3)(4) については、2009 年の吉川謙一氏との共著で示した Deligne-Mumford コンパクト化上の符号数因子の方法と、2010 年に筆者が示した局所符号不足数の概念を進化させつつ応用することを主眼とした。

4. 研究成果

(2) については、高次元デデキンド和のザギエ相互律を、与えられた整数の組に関するより広い条件のもとに拡張した。我々の方法は幾何学的なもので、巡回商特異点とおしの不変量の比較公式がその相互律を

与える。(次項の発表論文参照)

(1) については古典デデキンド和を連分数を用いて表すマイヤーソンらの公式を以下の形に拡張した。まず巡回商特異点の藤木解消を岡のトーリック双有理写像の合成により解釈し、その中から高次元連分数の概念を抽出した。それを用い、重みのない 3 次元フーリエ・デデキンド和を、この連分数を用いて表した。この成果を論文

“Multi-dimensional continued fractions for cyclic quotient singularities and Dedekind sums”

としてまとめ現在投稿中である。

(3)(4) については符号不足数の退化族への引き戻しの局所寄与を書き下すために、Eichler 跡公式の拡張版が有用であることに気付き、今まで行き詰まっていた部分をクリアできるようになった。この方法をもとに、論文作成の準備段階に入ったが、該当期間に仕上げることはできなかった。しかし継続して執筆努力を続けている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 12 件)

以下 12 件すべて査読あり。

(1) 研究代表者によるもの

[A1] T.Ashikaga, Toric modifications of cyclic orbifolds and an extended Zagier reciprocity for Dedekind sums, *Tohoku Math. J.* 67(2015), 323—347.

(2) 連携研究者によるもの

[K1] K.Konno, A note on smooth multiple fibers in pencils of algebraic curves, *Nihonkai Math. J.* 26 (2015), 103-120.

[K2] K.Konno, On the Yau cycle of a normal surface singularity, *Asian J. of Math.* 16, no.2 (2012), 279--298.

[K3] K.Konno and D. Nagashima, Maximal ideal cycles over normal surface singularities of Brieskorn type, *Osaka J. Math.* 49, no.1 (2012), 225—245.

[Y1] K.Yoshikawa, Degenerations of Calabi-Yau threefolds and BCOV invariants, *International Journal of Mathematics* 26 (2015) 1540010(33 pages).

[Y2] K.Yoshikawa, A trinity of the Borchers τ -function, *Symmetries, Integrable Systems and Representations*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 40 (2013), 575—597.

[Y3] K.Yoshikawa, K3 surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space II: a structure theorem for $r(M) > 10$, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 677 (2013), 15—70.

[Y4] K.Yoshikawa, K3 surfaces with involution, equivariant analytic torsion, and automorphic forms on the moduli space III: the case $r(M) = 18$, *Mathematische Zeitschrift* 272 (2012), 175–190.

[M1] K. Masuda and Y. Matsumoto, Axial fibrations of the Fermat surfaces and their singular fibers, *Revista Matemática Complutense* 26 no. 2 (2013), 589–633.

[M2]Y. Matsumoto, On the universal degenerating family of Riemann surfaces, in (Singularities in Geometry and Topology, Strasbourg 2009), IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 20 (2012), 71–102.

[I1]H. Ishida, A lower bound on the Euler-Poincaré characteristic of certain surfaces of general type with a linear pencil of hyperelliptic curves, *Canadian J. Math.* 68(2016), 67–87.

[I2]H. Ishida, On classes in the classification of curves in rational surfaces with respect to logarithmic plurigenera, *Adv. St. Pure Math.* 66(2015), 93–110.

〔学会発表〕(計 32 件)

以下 32 件すべて招待講演.

(1) 研究代表者によるもの

[A1] 足利正, A certain intersection number on moduli space of genus 3 and Horikawa index, 代数曲面ワークショップ, 首都大学東京サテライトキャンパス, 2016年2月6日

[A2] 足利正, 種数 3 のファイバー芽の堀川指数とアイヒラー跡公式, 第 2 回代数幾何学研究会宇部, 宇部高専, 2015年1月24日.

[A3] 足利正, Horikawa index of genus 3 with periodic monodromy via Eichler's trace formula, リーマン面に関連する位相幾何学 2014, 2014年8月25日.

[A4] 足利正, Higher-dimensional continued fractions for cyclic orbifolds and Dedekind sums, 射影多様体の幾何とその周辺, 高知大学, 2013年11月3日.

[A5] 足利正, 巡回商特異点の解消と高次元連分数, 多変数関数論冬セミナー, 東北大学, 2012年12月22日.

[A6] 足利正, 巡回商特異点のある解消プロセスとその例外集合, *Encounter with Math.* 59 回, 中央大学, 2012年10月13日.

[A7] 足利正, Dedekind 和に関する Zagier 相互律の幾何的拡張, リーマン面に関する位相幾何学 2012, 東京大学, 2012年9月2日.

[A8] 足利正, 特異点, 特異ファイバー, 一般型曲面, 夢, 特異点と多様体の幾何学 2012, 山形大学, 2012年8月26日

[A9] 足利正, Toric modifications of cyclic orbifolds and an extended Zagier reciprocity for Dedekind sums, 代数学シンポジウム 2012, 京大数理解析研究所, 2012年8月22日.

[A10]T. Ashikaga, Toric modifications of cyclic orbifolds and Dedekind sums, WCU workshop on classification and construction of algebraic varieties, Busan, KOREA, 2012 May 27.

(2) 連携研究者によるもの

[K1] 今野一宏, 平面 6 次曲線と標準曲面, 研究集会「第 11 回 代数・解析・幾何学セミナー」, 2016年2月15日, 鹿児島大学理学部.

[K2] 今野一宏, 一般型代数曲面の多重標準写像と標準環, 第 60 回代数学シンポジウム, 2015年9月1日, 静岡大学.

[K3] K. Konno, On the fixed part of a non-special linear system over a normal surface singularity, "Classification of Algebraic Varieties and Related Topics", Cetraro, Italy, September 9, 2013.

[K4] 今野一宏, Numerical invariants of fibred algebraic surfaces, 特異点と多様体の幾何学, 山形大学, 2012年8月26日.

[K5] K. Konno, Normal sextic surfaces which are canonical, "WCU workshop on classification and construction of algebraic varieties", Busan (Korea), 2012/5/26.

[Y1]K. Yoshikawa, Analytic torsion for K3 surfaces with involution, *Arithmetic and Algebraic Geometry* 2016, University of Tokyo, Japan, 2016年1月28日.

[Y2]K. Yoshikawa, Analytic torsion for K3 surfaces with involution, 2015 Taipei Conference on Complex Geometry, Academia Sinica, Taiwan, 2015年12月20日.

[Y3]K. Yoshikawa, Analytic torsion for K3 surfaces with involution, *Modular Forms and Geometry of Modular Varieties*, IMPA, Rio de Janeiro, Brazil, 2015年5月5日.

[Y4]K. Yoshikawa, Equivariant analytic torsion for K3 surfaces with involution, *Moduli spaces of irreducible symplectic varieties, cubics and Enriques surfaces*, Université Lille 1, Lille, France, 2014年3月26日.

[Y5]K. Yoshikawa, Analytic torsion and mirror symmetry, Paris-Kyoto-Barcelona Seminar in Arakelov Geometry, Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris, France, 2013年9月25日.

[Y6]K. Yoshikawa, Analytic torsion of log-Enriques surfaces, *Algebraic geometry, modular forms and applications to physics*, International Centre for Mathematical Sciences, Edinburgh, UK, 2012年11月27日.

[M1] 松本幸夫, モジュライ空間のコンパクト化と結晶群, 日本数学会年会トポロジー分科会特別講演, 筑波大学, 2016年3月16日.

[M2]Y. Matsumoto, Crystallographic groups arising from Teichmüller spaces, Masterclass, *Finsler geometry and applications to low-dimensional geometry and topology and*

moduli spaces, Palazzo delle Scienze, Via Ospedale 72, Renzo Caddeo and Athanase Papadopoulos, organizers. Cagliari-Sardinia-Italy, September 24, 2015.

[M3] 松本幸夫, モジュライ空間, カーブ複体, 結晶群, 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」 東京大学数理科学研究科, 2015年8月27日.

[M4] 松本幸夫, Curve complexes and the DM-compatification of moduli spaces, Symposium (Branched coverings, Degenerations, and Related Topics 2015), 東北学院大学工学部多賀城キャンパス, 2015年2月24日.

[M5] Y. Matsumoto, Relatively non-singular hermitian forms in low and higher dimensional knot theory, in (The 10-th East Asian School of knots and Related Topics) 華東師範大学(East China Normal University) Jan. 26, 2015.

[M6] Y. Matsumoto, Teichmüller spaces as infinite polyhedra, in (Summer School Finsler Geometry with Applications, A. Papadopoulos, G. Tsapogas, organizers) The University of the Aegean (Karlovassi, Island of Samos, Greece), September 25, 2014.

[M7] Y. Matsumoto, Teichmüller spaces as infinite polyhedra, FJV2014-Sapporo, The 2nd Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities, at Hokkaido Univ. 2014, Aug. 28.

[I1] 石田弘隆, Hyperelliptic fibrations with high slope, 特異点と多様体の幾何 2015, 草津セミナーハウス, 2015年9月25日.

[I2] 石田弘隆, 代数曲線束の相対不正則数について, 第2回代数幾何学研究集会宇部, 宇部高専, 2015年1月25日.

[I3] 石田弘隆, Notes on certain surfaces with a rational pencil, 代数幾何学シンポジウム岐阜, 岐阜高専, 2013年8月8日.

[I4] 石田弘隆, A note on the slope on hyperelliptic fibrations, 特異点と多様体の幾何2012, 山形大学, 2012年8月26日.

〔図書〕(計 3 件)

(1) 研究代表者によるもの
なし

(2) 連携研究者によるもの

[K1] 今野一宏, リーマン面と代数曲線, 共立出版, 2015.

[K2] 今野一宏, 代数方程式のはなし, 内田老鶴園, 2014.

[K3] 今野一宏, 代数曲線束の地誌学, 内田老鶴園, 2013.

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

なし

取得状況(計 0 件)

なし

〔その他〕

ホームページ等

なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

足利 正 (Ashikaga Tadashi)

東北学院大学 工学部 教授

研究者番号: 90125203

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

今野一宏 (Konno Kazuhiro)

大阪大学大学院 理学研究科 教授

研究者番号: 10186869

吉川 謙一 (Yoshikawa Ken-ichi)

京都大学大学院 理学研究科 教授

研究者番号: 20242810

松本 幸夫 (Matsumoto Yukio)

学習院大学 理学部 客員研究員

研究者番号: 20011637

石田 弘隆 (Ishida Hiroataka)

宇部工業高等専門学校 一般科 准教授

研究者番号: 30435458