

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 6 日現在

機関番号：32403

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540049

研究課題名(和文) 局所関数等式を満たす多項式に付随する空間の諸性質の研究

研究課題名(英文) Properties of the associated spaces of polynomials which satisfy local functional equations

研究代表者

小木曾 岳義 (Kogiso, Takeyoshi)

城西大学・理学部・教授

研究者番号：20282296

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：局所関数等式を満たす多項式のペアの研究について、以下の研究成果を得た。  
 (1) Clifford quartic formsの応用として、Etingof, Kazhdan, Polishchukの予想した問題を解決した。(佐藤文広氏との共同研究)  
 (2) ある種の可解群が作用する概均質ベクトル空間の相対不変式の乗法的Legendre変換の決定とb-関数の型を予想した(この予想はまだ未解決である)(この研究は伊師英之氏との共同研究である)  
 (2) 局所関数等式を満たす多項式のペアの極化のb-関数の型、局所関数等式のガンマ因子の型を予想した(この予想は佐藤文広氏によって最近解かれた)。

研究成果の概要(英文)：It is known that one can associate local zeta functions satisfying a functional equation to the irreducible relative invariant of an irreducible regular prehomogeneous vector space. We construct polynomials of degree 4 (called Clifford quartic forms) that cannot be obtained from prehomogeneous vector spaces, but for which one can associate local zeta functions satisfying functional equations. The following study results were obtained. (1) We solved a conjecture by Etingof, Kazhdan and Polishchuk by using Clifford quartic forms (This is joint work with F.Sato). (2) We determined the multiplicative Legendre transformations for subHankel determinant and gave a conjecture for the form of the associated b-functions. This conjecture is still open. (This is joint work with H. Ishi) (3) We gave a conjecture for the form of b-function and one of the gamma factor of local functional equation with respect to the polarization of a homaloidal polynomial (This conjecture was solved by F.Sato recently.)

研究分野：整数論、表現論

キーワード：局所関数等式 homaloidal polynomial Legendre変換 Fourier変換 Clifford algebra 概均質ベクトル空間 Jordan algebra 多項式の極化

1. 研究開始当初の背景

「どのような多項式のペアが局所関数等式を満たすか？」という問題に関する一つの大変有力な答えとして「簡約正則概均質ベクトル空間の非退化な相対不変式と、その多項式に対応する双対空間の相対不変式のペアは局所関数等式を満たす。」という佐藤幹夫氏の結果があり、その後、「簡約」、「正則」という条件を緩める研究(佐藤文広氏、行者明彦氏)などが行われてきた。また、上記の問題の類似の問題として「乗法的 Legendre 変換が再び多項式になるような多項式」を探す研究(Kazhdan 氏を中心とする研究)があった。しかしこれらの研究に登場する局所関数等式を満たす多項式はすべて概均質ベクトル空間の相対不変式の域を出ていなかった。申請者の求めているものは「概均質ベクトル空間の理論ではカバーされないような、本質的に概均質ベクトル空間の相対不変式とは異なる様な局所関数等式を満たすような多項式」を見つけることであった。上記のような多項式を探るための研究を、研究代表者は平成20年度から平成23年度の科学研究費基盤Cの研究テーマに選び、以下のような成果が得られている。佐藤文広氏の2007年論文(Comment. Math. Univ. St. Pauli, 56(2007), 163-184)で、次元の大きな空間(上の空間と呼ぶ)から下の次元の小さな空間(下の空間と呼ぶ)へのよい性質を満たす2次写像があるとき、もし下の空間の多項式が局所関数等式を満たすならば、上の空間の多項式も局所関数等式を満たすという、ある種の局所関数等式の遺伝定理がある。この研究を踏まえて、下の小さな空間として2次形式を相対不変式として持つような簡約正則概均質ベクトル空間をとった場合について、正定値 Clifford 代数  $C_p, C_q$  のテンソル積  $R_p, q$  の表現を用いてよい性質を満たす2次写像を構成し、佐藤氏の遺伝定理から上にある局所関数等式を満たす4次多項式を構成することに、佐藤氏との共同研究で成功した。さらにこのように構成した多項式が住んでいる空間を特定するための分類を完全に行い、 $R_p, q$  の  $p+q$  が小さい場合と低次元表現の例外を除いた全ての例が非概均質的多項式であることを示した。我々は、これらの局所関数等式を満たす多項式を Clifford quartic form と命名した。

2. 研究の目的

「1.」で説明した Clifford quartic form に付随する空間の分類結果を踏まえて、そこから得られる結果を導くとともに、他分野との関連などを調べ、そこにどのような理論的背景があるかを明らかにする。

3. 研究の方法

今まで研究した Clifford quartic form を足がかりにして、その研究に用いた、Lie 環、代数群の表現論的手法、調和解析手法に加え、Kazhdan 学派が類似の研究で用いた射影幾何学に注目した手法も参考にして、研究を進めた。また、佐藤文広氏の保型形式の研究に用いた手法、伊師英之氏の等質錐の研究に用いた手法なども新たに参考にした。

4. 研究成果

(1) 非概均質型局所関数等式を満たすペアの系統的構成

佐藤文広氏との共同研究により得られた Clifford quartic form に付随する空間は局所関数等式を満たす無限系列であるが、有限個の例外を除き、殆どが非概均質ベクトル空間であり、今まで知られていない新しいタイプであることが分かった。

(2) Etingof, Kazhdan, Polishchuk の予想の否定的解決

Etingof-Kazhdan-Polishchuk の論文の中で、乗法的 Legendre 変換が多項式になるような多項式は概均質ベクトル空間の相対不変式ではないかという予想が述べられているが、我々の構成した Clifford quartic form は、その乗法的 Legendre 変換が多項式になるが、(1)で述べたように、非概均質的多項式である。

(3) ある種の可解群が作用する概均質ベクトル空間の相対不変式の乗法的 Legendre 変換の決定と b-関数の予想

簡約代数群の概均質ベクトル空間についてはいろいろ研究結果があるが、非簡約代数群の概均質ベクトル空間についての研究はあまりされていないが、組み合わせ論や超幾何関数と関係する subHankel 行列式について、その付随する空間が非簡約代数群の概均質ベクトル空間であり、その乗法的 Legendre 変換を決定し、b-関数の形を予想した。

(4) 局所関数等式を満たす多項式のペアの極化の b-関数、局所関数等式

局所関数等式を満たす多項式のペアから、その極化の多項式を構成し、それらが、多変数の局所関数等式を満たし、そのガンマ因子も具体的に決定した。これは小木曾が実験的な計算データからガンマ因子の形を予想し、佐藤文広氏がそれに証明を与えた。またこれに関連して、概均質ベクトル空間の分類に役立つ定理も証明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① Fumihiko Sato and Takeyoshi Kogiso, Representation of Clifford Algebras and local functional equations. RIMS-Kokyuroku-Bessatsu, B36(2012), 53–66.
- ② Takeyoshi Kogiso, Fourier transforms of the polynomials and prehomogeneous vector spaces, Proceeding of 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex analysis-I, 241–254.
- ③ Tatsuo Kimura, Takeyoshi Kogiso, Yoshiteru Kurosawa and Masaya Ouchi, Prehomogeneous vector spaces and their regularity, Josai mathematical monograph vol.5, 2012, 89–111.
- ④ Tatsuo Kimura, Takeyoshi Kogiso and Masaya Ouchi, A classification of some prehomogeneous vector spaces related with hypergeometric functions, Josai mathematical monograph, vol.5, 2012, 71–88.
- ⑤ Takeyoshi Kogiso and Yoshiteru Kurosawa, On a certain class of cuspidal prehomogeneous vector spaces and its basic relative invariants, Josai Mathematical Monograph vol.6 (2013), 125–136.
- ⑥ Takeyoshi Kogiso, Castling transforms of prehomogeneous vector spaces and Markoff numbers, Proceedings of the 8th. International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 2015, 271–287

[学会発表] (計 18 件)

- ① 小木曾岳義, 「局所関数等式を満たす多項式のペアについて」、筑波大学数学系特別

セミナー, 筑波大学数学系 D814, 2012 年 6 月 7 日

- ② 小木曾岳義, 「Clifford 代数の表現から得られる局所関数等式」、近畿大学理工学部数学科講演会, 近畿大学理工学部数学科教室、2012 年 7 月 9 日
- ③ 小木曾岳義, “Quadratic maps to PV’s and local functional equations”, Representations of algebraic groups and related topics (城西大学大学院数学専攻主催研究集会), Kioicho-Campus, Josai University, 2012 年 9 月 16 日
- ④ 小木曾岳義, “Quadratic maps to PV’s and local functional equations”, Kyoto Conference on automorphic forms, department of mathematics, Kyoto University, 7th. October, 2012.
- ⑤ 小木曾岳義, 「PV の裏返し変換についての一考察」表現論ワークショップ, 鳥取県民ふれあい会館 5 階会議室、鳥取市、2012 年 12 月 26 日
- ⑥ 小木曾岳義, 「Representations of Clifford algebras and local functional equations」九州大学表現論セミナー (九州大学伊都キャンパス数理解析教育棟 3 階中セミナー室)、福岡市、2013 年 3 月 6 日
- ⑦ 小木曾岳義, 「非概均質的局所関数等式について」早稲田大学整数論セミナー (早稲田大学西早稲田キャンパス 61 号館 4 階 413 室(61-413))、東京都高田馬場、2013 年 5 月 17 日
- ⑧ Takeyoshi Kogiso, Clifford quartic forms and nonprehomogeneous local functional equations」、2013 年 6 月 26 日 数理解析研究所研究集会 「Development of Representation Theory and its Related Fields」(京都大学数理解析研究所)、京都、2013 年 6 月 26 日
- ⑨ Takeyoshi Kogiso, 「Castling transforms of Prehomogeneous vector spaces and Markoff numbers」、The eighth international conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis 2013 (弘前大学 50 周年会館)、青森県弘前市、2013 年 8 月 5 日
- ⑩ Takeyoshi Kogiso, 「Representations of Clifford algebras and local functional equations」、JSPS-NWO Seminar(日本オランダ二国間交流共同セミナー), Analysis, Geometry and Group Representations for Homogeneous Spaces、名古屋大学多元数理科学研究科・5 階講義室)、愛知県名古屋市、2013 年 8 月 27 日

- ⑪ 小木曾岳義, 「EKP-homaloidal function について」、表現論ワークショップ (京都大学大学院理学研究科セミナーハウス)、京都市、2013年9月11日
- ⑫ 小木曾岳義, 「乗法的 Legendre 変換と局所関数等式」、日蘭セミナー整理会 (九州大学大学院数理科学研究科中セミナー室7)、福岡市、2013年9月29日
- ⑬ Takeyoshi Kogiso, "Clifford quartic forms and local functional equations", Analysis, Geometry and representations on Lie Groups and Homogeneous spaces, Marrakech, Morocco, 2014年12月8日
- ⑭ 小木曾岳義, 「Multiplicative Legendre 変換と局所関数等式」、表現論ワークショップ、ふれあい会館生涯学習センター、鳥取市、2014年12月26日
- ⑮ Takeyoshi Kogiso, "Representation of Clifford algebras and generalized Hurwitz Problem", Workshop of Deformation of discrete groups and related topics", 名古屋大学多元数理科学研究科, 2015年2月18日
- ⑯ 小木曾岳義, "Local functional equations of Clifford quartic forms and homaloidal polynomials," Lie 群論・表現論セミナー, 東京大学大学院数理科学研究科, 2015年5月26日
- ⑰ 小木曾岳義, 「ある種の generic catalecticant の Legendre 変換と b-関数」、ふれあい会館生涯学習センター、鳥取市、2016年1月10日
- ⑱ Takeyoshi Kogiso, 「Local functional equations of non-prehomogeneous type」, International conference of Geometry, Representation theory and differential equations」, 九州大学伊都キャンパス IMI, 2016年2月19日

〔図書〕 (計2件)

- ① 小木曾岳義, 数理科学 2013年1月号 「表現論の世界」 (サイエンス社), 34-39.
- ② 小木曾岳義, 「表現論および表現論の関連する諸分野の発展」, 京都大学数理科学研究所講究録 1877, 2013年70-87.

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 件)

名称：  
 発明者：  
 権利者：  
 種類：  
 番号：  
 出願年月日：  
 国内外の別：

○取得状況 (計 件)

名称：  
 発明者：  
 権利者：  
 種類：  
 番号：  
 取得年月日：  
 国内外の別：

〔その他〕  
 ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小木曾 岳義 (Takeyoshi Kogiso)  
 城西大学・理学部・教授  
 研究者番号：20282296

(2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：