

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 26 日現在

機関番号：32644

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540050

研究課題名(和文)強いレフシェッツ性を有するゼロ次元ゴレンスタイン環

研究課題名(英文)Zero-dimensional Gorenstein algebra with the strong Lefschets properties

## 研究代表者

渡邊 純三(Watanabe, Junzo)

東海大学・理学部・教授

研究者番号：40022727

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：2013年9月5名の日本人若手研究者との共著で、「Lefschetz Properties」と題する英文250頁の講義録を出版した。これを完成するためには10年の歳月を要した。その過程で、本研究が、代数学の多くの他の分野と密接に関連していることが明らかになった。2012年9月、ハワイ東海大学にて国際研究集会を開催し、国内外の研究者13名を招待し、その時点での最新の成果報告と意見交換を行うことができた。2015年3月、独、米、西の3名の研究者の協力の下に、ドイツ・ゲッチンゲン大学にて、再度、国際研究集会を開催し、国内外(日・独・米・伊・瑞)の研究者約25名が集まり、成果報告・意見交換を行った。

研究成果の概要(英文)：In September, 2013, I published a book entitled "The Lefschetz Properties," with 5 Japanese coauthors. It took 10 years to write this book. In the course of writing the book, it turned out that the topic has many ties to other areas of algebra. In September 2012, I organized a workshop in Hawaii Tokai International College, where 13 researchers from Japan, USA, Sweden and Germany, gathered and we reported the latest results and exchanged ideas. In March, 2015, I organized a workshop in Goettingen, Germany, for the second time, under a cooperation with German and American and Spanish researchers, where more or less 25 researchers came together and we exchanged ideas and new results. It is scheduled to have such a workshop at Banff, Canada in 2016 for the third time.

研究分野：代数学

キーワード：Lefschetz Properties 0次元ゴレンスタイン環 完全交叉環 Sperner 性 ヒルベルト関数 次数付き環 コホモロジー環 巾ゼロ元

## 1. 研究開始当初の背景

「ゼロ次元標準次数付き完全交叉環は強いレフシェッツ性を有するであろう」と予想するのは自然である。この予想は、1985年には、既に一部の研究者には知られていたことである。しかし、1985年以降、2000年までは、ほとんど手がつけられない状況が続いていた。2000年代に入り、J.Watanabe, T.Harima, J.Migliore, U.Nagel ら4名の共著論文により3変数の完全交叉環は弱いレフシェッツ性を有することが証明された。これが突破口となり、レフシェッツ条件の研究は大幅に前進した。2012年までに、「平坦拡大定理」、「分割定理」、「部分環定理」等が証明され、代数学の他の多くの分野との密接な関係が明らかにされた。また、国内外での研究者の数も大幅に増加した。しかし、当初の予想の解決そのことは、本研究の開始時点において、依然として困難な問題であった。また、それは、現時点においても困難な問題であることに変わりはない。

## 2. 研究の目的

ゼロ次元ゴレンスタイン環のレフシェッツ性に関する理解を深めることが本研究の目的である。究極の目的は、「ゼロ次元標準次数付き完全交叉環は、強いレフシェッツ性を有する」という予想を解決することである。そのためには、周辺の問題を扱うことが必要となる。

## 3. 研究の方法

問題を2つに分割する。(1) 2次式完全交叉は、すべて強いレフシェッツ性を有することを証明する。(2) どのような完全交叉環が、2次式完全交叉環の部分環となるか、(このとき、ソークルと一般元を共有するようにする)を考察する。予想では、全ての完全交叉環は、2次式完全交叉環の部分環であり、その時、ソークルと一般元を共有することができる。そうだとすれば、問題は、2次式完全交叉環のレフシェッツ問題に帰着する。従って、2次式完全交叉の場合の証明が問題になるのだが、それはグレブナ基底が、トーラスの作用でどの様に変化するか(または、変化しない場合は何か)を追求することにより、良い結果が得られると期待できる。

## 4. 研究成果

(1) Proceeding of AMS に掲載された論文 "A note on complete intersections of height three" の結果を一般変数に拡張した。即ち、次のことを証明した:  $n$  変数多項式環において、 $(F_1, \dots, F_n)$  を完全交叉とし、各  $F_i$  の次数を  $d_i$  とする。このとき、一般的1次式  $L$  に対して、イデアル  $(L, F_1, \dots, F_n)$  の極小生成

元の個数が  $n+1$  であるための必要十分条件は、 $d_1 + \dots + d_{n-1} - n - 1 > d_n$  である。このことは、「任意の完全交叉が強いレフシェッツ性をもつ」ことを仮定するならば当然成立することである。

(2) 張間忠人氏の協力の下で、 $m$ -full イデアルが弱いレフシェッツ性をもつための必要十分条件をその次数付ベッチ数列の言葉で記述することができた。これは、componentwise linear イデアルに関する2004年のWiebeの結果の一般化である。また副産物として、標数ゼロにおいて completely  $m$ -full イデアルと componentwise linear イデアルは同値な概念であることを示した。

(3) 研究集会「可換環論と鏡映群の表現論」で得られた完全交叉のレフシェッツ性問題に関するこれまで10年間の研究成果を講義録の形式でまとめ、ドイツ Springer 社から出版した。これは、研究集会の主メンバー5名との共同研究であり、今回のプロジェクトの最大の成果である。

例えば9章では、同次数モノミアル完全交叉環のレフシェッツ性が、Shur-Weyl の相互法則と関連していることを示した。

さらに、ヘッセ行列式が恒等的に消える齊次多項式に関する Gordan と Noether の結果 (1876年)の証明と彼らのやり残した課題について、2012年9月に開催されたハワイ東海大学における国際研究集会にて発表し、Nagel 氏や Migliore 氏らの推進する4変数完全交叉環の弱いレフシェッツ条件の研究に大きく貢献できた。また、同研究会に参加したゲッティンゲン大学名誉教授の Larry Smith 氏により、代数的トポロジーの立場より、いくつかの共同研究のテーマを得ることができた。とりわけ、正標数における弱いレフシェッツ条件に新しい意味をみつけることができた。その結果を講義録の付録に書いた。

(4) 3変数で Rees 性を有するが  $m$ -full ではないモノミアルイデアルを体系的に構成する方法を与えた。これは、ハワイのワークショップに参加した村井聡氏に負うところが大きい。

(5) 張間忠人氏の協力の下で、レフシェッツ性問題との関連において「任意標数上で、completely  $m$ -full イデアルと componentwise linear イデアルのクラスは一致する」ことを証明した。またその応用として、Nagel 氏と Roemer 氏らの結果である componentwise linear Gorenstein イデアルの構造定理の別証明を与えた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 8 件)

Tadahito Harima and Junzo Watanabe, Completely  $m$ -full ideals and componentwise linear ideals, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 158 巻 239-248 (2015), 査読有

Junzo Watanabe and Toyohiro Akamatsu, The set of solutions of a system of linear partial differential equations, 東海大学理学部紀要, 50 号 1-18 (2015) 査読有

Junzo Watanabe, On the theory of Gordan-Noether on homogeneous forms with zero Hessians, 東海大学理学部紀要, 49 号 1-21 (2014) 査読有

Tadahito Harima, Satoru Isogawa and Junzo Watanabe, A note on graded Betti numbers of completely  $m$ -full ideals, 新潟大学教育学部研究紀要, 7 巻 1-6 (2014), 査読無

Juan Migliore, Rosa M. Miro-Roig, Satoshi Murai, Uwe Nagel and Junzo Watanabe, On ideals with the Rees property, Archiv der Mathematik, 101 巻 445-454 (2013) 査読有

Tadahito Harima and Junzo Watanabe, The weak Lefschetz property for  $m$ -full ideals and componentwise linear ideals, Illinois Journal of Mathematics, 56 巻 957-966 (2012) 査読有

Junzo Watanabe, On the minimal number of generators of the quotient of a complete intersection by a general linear form, Proceedings of the School of Science of Tokai University, 47 巻 1-10 (2012) 査読有

Toshiaki Maeno, Yasuhide Numata and Akihito Wachi, Strong Lefschetz elements of coinvariant rings of finite Coxeter groups, Algebras and Representation Theory, 14 巻 625-638 (2011) 査読有

〔学会発表〕(計 10 件)

渡辺 純三, The quadratic complete intersections associated with the action of the symmetric group, Workshop on Lefschetz Properties, 2015 年 3 月 9

日, Universitat Goettingen (ドイツ)

渡辺 純三, The Sperner property of posets and the strong Lefschetz property of Artinian Gorenstein rings, 2014 年 4 月 18 日, Colloquium at Department of Mathematics, Nebraska State University at Lincoln (USA)

渡辺 純三, A conjecture: all complete intersections have the strong Lefschetz property in characteristic zero, 2014 年 4 月 16 日, Algebra Seminar at the Department of Mathematics, Nebraska State University at Lincoln (USA)

張間忠人, 渡辺純三, Completely  $m$ -full ideals and componentwise linear ideal, 日本数学会 2014 年度秋季総合分科会一般講演, 2014 年 9 月 26 日, 広島大学 (広島県)

渡辺純三, 2 次式で生成される完全交叉環のレフシェッツ性について, 組合せ論と可換代数サマーセミナー, 2014 年 9 月 26 日, 宮島コラルールホテル (広島県)

渡辺純三, 解説: ゴルダン-ネーターの論文 "Ueber die algebraischen Formen deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet", 吉野雄二先生還暦記念研究集会, 2014 年 10 月 13 日, 岡山大学理学部 (岡山県)

渡辺純三, A new class of Gorenstein algebras with the strong Lefschetz property, International conference on Commutative Algebra and its Interaction to Algebraic Geometry and Combinatorics, 2013 年 12 月 17 日, Hanoi (Vietnam)

渡辺純三, Introduction to the paper of Gordan-Noether (Homogeneous Polynomials whose Hessian determinant Identically vanishes), Aspects of SLP and WLP, 2012 年 9 月 12 日, Hawaii Tokai International College (USA)

渡辺純三, 2 次式完全交叉環と強いレフシェッツ性条件, 組合せ論と可換代数サマーセミナー, 2013 年 8 月 9 日, 下関市生涯学習プラザ (山口県)

張間忠人, 渡辺純三, The weak Lefschetz property for  $m$ -full ideals and componentwise linear ideals, 日本数学会 2012 年度年会一般講演, 2012 年 3 月 26 日, 東京理科大学 (東京都)

〔図書〕(計 1 件)

Tadahito Harima, Toshiaki Maeno,  
Hideaki Morita, Yasuhide Numata,  
Akihito Wachi and Junzo Watanabe,  
The Lefschetz properties, Springer,  
Lecture Notes in Mathematics, 2080 巻  
1-250 (2013) 査読有

6 . 研究組織

- (1)研究代表者 渡辺純三 (WATANABE, Junzo )  
東海大学・理学部・特任教授  
研究者番号 : 40022727