

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 1 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540051

研究課題名(和文) 正標数代数多様体に関する諸問題の解決に向けて

研究課題名(英文) Toward the resolution of problems on algebraic varieties in positive characteristic

研究代表者

伊藤 浩行 (Ito, Hiroyuki)

東京理科大学・理工学部・教授

研究者番号：60232469

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：1) p ねじれ Mordell-Weil群を持つ楕円K3曲面を分類し、そのモジュライ空間は有理二重点の変形族から与えられるという結果を得た。2) 野生的商特異点に関して、双対グラフ、Taut性に関して非常に興味深い結果を得た。3) 擬導分を導入することにより、長さ p の有限群スキームによる商特異点を考察し、野生的商特異点の概念を拡張するとともに、変形理論を用いて有限群商と群スキーム商との統一的扱いを可能とした。これによりTautではない商特異点の族を得ることが出来た。4) 疑似乱数生成について引き続きASTの性能評価を行うとともに、非ケーラー幾何と正標数代数幾何との類似についても考察を重ねた。

研究成果の概要(英文)：1) We classified elliptic K3 surfaces whose Mordell-Weil group have p -torsion. As a corollary, we found the strong relationship between the moduli space of such surfaces and deformation spaces of rational double points. 2) We solved the problems on the dual graph of wild quotient singularities. 3) By introducing the notion of pseudo-derivations, we consider quotient singularities not only by finite groups but by group schemes, which enable the unified treatment of various quotient singularities in positive characteristic. 4) We continued the evaluation of AST pseudo-random number generators. We also collect and consider the phenomena which give the evidences of the analogy between non-Kaeler geometry and positive characteristic algebraic geometry.

研究分野：代数学

キーワード：代数幾何学 特異点 正標数 楕円曲面 K3曲面 群スキーム 疑似乱数生成 非ケーラー幾何

1. 研究開始当初の背景

イタリア学派による Enriques 流の代数曲面の分類理論は Bombieri、Mumford 等により正標数においても大枠で機能することが 70 年代に分かったが、同時に Bertini の定理の不成立や Frobenius 写像の存在、野生的分岐等の現象により一部においては標数零とは決定的に異なる世界が生ずることも分かった。正標数の代数幾何学においては、このような特殊性により、様々な病理現象を見ることが出来る。一例を挙げると、スムーズ多様体上のファイブレーションで一般ファイバーがスムーズではない準(楕円)ファイブレーションの存在、小平消滅定理の不成立、超特異多様体の存在、標数零とは異なる特異点の分類、標数零へ持ち上げ不可能な多様体の存在等々である。これら正標数特有の種々の病理現象を研究し、それらの数学的理由付けを解明することにより全てを包括する一般理論の構築を行うことが正標数代数幾何学の目的の一つである一方、整数論や数論幾何学をはじめとした他分野との関連から正標数代数多様体の数論的及び幾何学的研究も活発に行われている。また、近年符号理論や暗号理論、疑似乱数生成などへの正標数代数幾何学の応用も多く得られるとともに、逆にこれら応用分野から代数幾何学への課題フィードバックも様々に存在する。

2. 研究の目的

上述のような背景のもと、本研究では、主に正標数の体上で定義された代数多様体に関して、代数幾何学、特異点論、数論、複素幾何学、応用代数学など周辺分野を取り入れた複眼的視野からの研究により、

- A) K3 曲面や Calabi-Yau 多様体に関する諸問題の解決に向けたモジュライ空間の構造解明
- B) 特異点論における正標数特有の病理現象の統括的解明
- C) 他分野との関連を見据えた新しい正標数代数幾何学研究の試み

の 3 つを主目的とする。

3. 研究の方法

全体として平成 23 年度終了の科学研究費基盤(C)での研究課題において得られた研究からの継続性を重視し研究を進めた。

上述 A)、B)、C)の中心的課題を研究するために以下の 5 項目に関して研究を行った。

- (1) K3 曲面が楕円ファイブレーション構造を持ち、その Mordell-Weil 群が p ねじれ分

群を持つ場合の分類とそのモジュライ空間の構造究明。

- (2) 有限群による 2 次元商特異点、特に野生的な場合の例の構成、双対グラフに関する種々の予想の検証や Taut 性の研究
- (3) 群スキームによる商特異点の例の構成と一般論の構築、有限群商と群スキーム商の統一的扱いが出来る枠組みの研究
- (4) Artin-Schreier 拡大の利用による疑似乱数生成の研究
- (5) 正標数代数幾何と非ケーラー幾何との類似に関する研究

4. 研究成果

上述の項目に従って述べる。

- (1) p ねじれ部分群を Mordell-Weil 群に持つような K3 曲面の族の構成を行った。そのような族は有理二重点の変形族から得られ、特異点の変形理論とモジュライ空間の間の興味深い関係を得ることが出来た。また、系として特殊な場合に単有理予想を得ることが出来た。
- (2) 正標数の場合、有限群による商特異点で問題となるのは有限群の位数が標数で割り切れる野生的な場合である。2 次元の場合に、その基本群、双対グラフに関して興味ある結果を得た。特に双対グラフに関しては、そのノードの数に関する Lorenzini により与えられた問題に興味深い解答を与えることが出来た。また、野生的特異点の Taut 性の研究から、次項の群スキーム商との関連が見出された。
- (3) 正標数において、野生的な場合は有限群商にとどまらず、有限群スキーム商まで考慮する必要があることを示した。特に、長さが p である有限群スキームについて位数が p である有限群との変形により関係づけることにより、族としての群スキームを構成し、その商として野生的特異点の族を与えた。これにより、Taut ではない場合の現象が良く理解出来た。また、環論的な表示を考えることにより、擬導分の理論を構築した。今後の研究に大きな期待をもてる。また、有理二重点は正標数であっても、群スキーム商まで考慮することで商特異点と考えられることの傍証を多く与えた。
- (4) Artin-Schreier 拡大塔による疑似乱数生成の性能評価については、残念ながら進展がない。
- (5) 正標数代数多様体と非ケーラー多様体の類似に関して、類似する現象を認識することが第一歩であるが、非ケーラー多様体に関してある種のスペクトル列が退化しない場合に着目し検討を重ねたが、類似現象の原理を説明するには至っていない。現在、導来圏を用いた現象解明を行っている。今後の発展に期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

(1) Hiroyuki Ito and Stefan Schroeer, Wild quotient surface singularities whose dual graphs are not star-shaped, 査読有り, Asian Journal of Mathematics, 19, 951-986 (2015).

DOI: <http://dx.doi.org/10.4310/AJM.2015.v19.n5.a7>

(2) Masayuki Hirokado, Hiroyuki Ito and Natsuo Saito, Three dimensional canonical singularities in codimension two in positive characteristic, 査読有り, Journal of Algebra, 373, 207-222 (2013). DOI: <http://dx.doi.org/10.4310/AJM.2015.v19.n5.a7>

(3) Hiroyuki Ito and Christian Liedtke, Elliptic K3 surfaces with p^n torsion sections, 査読有り, Journal of Algebraic Geometry, 22, 105-139 (2013).

DOI:

<http://dx.doi.org/10.1090/S1056-3911-2012-00584-0>

(4) Hiroyuki Ito and Stefan Schroeer, Wildly ramified actions and surfaces of general type arising from Artin-Schreier curves, 査読有り, Geometry and Arithmetic (in honor of Gerald van der Geer), European Mathematical Society, 213-241 (2012).

DOI 10.4171/119

[学会発表](計 10 件)

(1) Hiroyuki Ito, Pseudo-derivations and wild group scheme quotient singularities, The 14th Affine Algebraic Geometry Meeting, 2016年3月5日, Kwansai Gakuin University, Osaka.

(2) Hiroyuki Ito, Pseudo-derivations and wild group scheme quotient singularities, Conference on K3 surfaces and related topics, 2015年11月17日, Korean Institute for Advanced Studies, Korea.

(3) Hiroyuki Ito, 有理二重点は商特異点か?, 射影多様体の幾何とその周辺 2015, 2015年11月1日, 高知大学理学部.

(4) Hiroyuki Ito, Are rational double points quotient singularities even in positive characteristic?, Tsuda College Mini-workshop on Calabi-Yau

Varieties: Arithmetic, Geometry and Physics, 2015年8月5日, Tsuda College, Tokyo.

(5) Hiroyuki Ito, On the quotient singularities in positive characteristic, Tsuda College Mini-Workshop on Calabi-Yau Varieties: Arithmetic, Geometry and Physics, 2014年8月7日, Tsuda College, Tokyo.

(6) Hiroyuki Ito, 正標数の2次元商特異点について, 函館数論幾何ワークショップ, 2014年5月27日, 函館中央図書館, 函館.

(7) Hiroyuki Ito, Two-dimensional wild quotient singularities in positive characteristic, Birational Geometry and Singularities in Positive Characteristic, 2013年11月5日, University of Tokyo, Tokyo.

(8) Hiroyuki Ito, 正標数の商特異点について, 第5回代数曲面ワークショップ at 秋葉原, 2013年10月26日, 首都大学東京, 秋葉原サテライトキャンパス, 東京.

(9) Hiroyuki Ito, On tautness of surface singularities in positive characteristic, The 12th Affine Algebraic Geometry Meeting, 2013年9月5日, Kwansai Gakuin University, Osaka.

(10) Hiroyuki Ito, On wild quotient singularities, 2013年代数幾何学城崎シンポジウム, 2012年10月25日, 兵庫県城崎大会議館, 兵庫.

[図書](計 0 件)

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/hi/math/index.html>

6．研究組織

(1)研究代表者

伊藤 浩行 (ITO HIROYUKI)

東京理科大学・理工学部・教授

研究者番号：60232469

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

廣門 正行 (HIROKADO MASAYUKI)

広島市立大学・大学院情報科学研究科・講師

研究者番号： 40316138

齋藤 夏雄 (SAITOU NATSUO)

広島市立大学・大学院情報科学研究科・講師

研究者番号： 70382372