1版

様 式 C－１９、F－１９、Z－１９ （共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　５ 月 ２８ 日現在

機関番号：３２７０２
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2015
課題番号：２４５４００５６
研究課題名（和文）有限体上の代数曲線論とその応用としての符号・有限幾何

研究課題名（英文）Algebraic curves over finite fields and their applications to coding theory and finite geometry

研究代表者
本間　正明（Homma, Masaaki）

神奈川大学・理学部・教授

研究者番号：８０１４５５２３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：過去10年以上，有限体F上定義された代数多様体のF-有理点の個数について興味を持ち研究を続けてきた．今回終了した研究課題もその一環である．今回は主として射影空間内の超曲面を取り扱い，超曲面のF-有理点の個数について，射影空間の次元，有限体の個数，超曲面の次数，それらのみ依存し，かつ次数に関しては線形な上限を与え，これを elementary bound と名づけた．さらに，射影空間の次元と有限体の個数とを固定したとき，３つの次数について等号をとる例の存在を確認し，射影空間の次元が３のときにはelementary bound を到達する曲面の決定にも成功した．

研究成果の概要（英文）：For the past decade, we have had a great interest in the number of rational points of a variety over a finite field. This project is also concerned with such a topic. The main result of this research project is as follows.
Let X be a hyper-surface of degree d in n-space over a finite field F of q-elements. We obtained a bound for the number of F-rational points of X. This bound is depending only on d, q and n, and also linear in d. We named this bound elementary bound. Moreover, for each (q, n), there are three hyper-surfaces with different degrees each other that attain the elementary bound. Additionally, we have determined the all surfaces in 3-space that attain the elementary bound.

研究分野：代数幾何

キーワード：代数多様体　有限体　射影空間　超曲面

１．研究開始当初の背景

（１）筆者はここ 10 年以上にわたり，代数幾何符号の基盤となる有限体上定義された代数多様体の有理点の個数に興味を持って研究を続けていた．当該助成事業による研究を開始した時点での成果の蓄積について，簡単に述べる．発端は P. Sziklai の論文①で述べられた予想である．それは，有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の $\mathbb{F}_q$-直線を成分を持たない次数 d の平面代数曲線の有理点の個数 N について，$N \leq (d-1)q+1$ であろうというものであった．
（２）共同研究者 S. J. Kim と共に，この予想はひとつの例外，$q=d=4$ で

$$\sum_{j=0}^{2} X_j^4 + \sum_{i<j} X_i^2 X_j^2 + X_0X_1X_2 \sum_{j=0}^{2} X_j = 0$$

を除けば正しいことを一連の論文 ② ③ ④ によって示していた．また，$d = q+2, q+1, q, q-1, \sqrt{q}+1, 2$ の各次数については実際に等号をとる例が存在し，しかも特異点を持たない曲線では等号をとる可能な次数はこれらに限ることなども示していた．

２．研究の目的

（１）上に述べた背景をふまえ，n 次元射影平面 $\mathbb{P}^n$ で，有限体上定義された超曲面についての類似のよい上界を与えることが当初の研究目的であった．
（２）研究の進展と共に，Deligne によって確立された Weil 予想，Segre，Serre，Sørensen，K. Thas 等の仕事との比較にも踏み込むことになった．

３．研究の方法

（１）本研究も，今まで申請者が多くの研究を共にしてきた S. J. Kim との共同研究として立案された．比較的まとまった時間が取れる時期に韓国に Kim 教授を訪問し集中的に共同研究を行い，その他の時期はメールでのアイデア交換を行った．ただ，後者の方法では隔靴掻痒の感もあり，前者が主要な共同研究の方法となった．
（２）数学の研究においては，いつの時代でもアイデア・情報の交換が有効であった．かつては，特に西欧から離れた日本では，文献や手紙と言う手段が多かったが，今や，これらはインターネットを通じて得られまたは発信することが多くなっている．しかし face-to-face での議論は informal ではあるが思いがけない効果を生むこともある．この意味で，機会を捉えて conference, symposium, workshop に参加し，あるいは，内外の関連研究者を招聘し議論することは有力な研究方法である．

４．研究成果

（１）研究成果を述べるために，必要な記号を準備する．n 次元射影空間を $\mathbb{P}^n$ で表し，q を素数 p の冪 p^e とし，q 個の元からなる有限体を $\mathbb{F}_q$ とする．$\mathbb{P}^n$ の $\mathbb{F}_q$-点の個数は $q^n + q^{n-1} + \ldots q + 1$ であるが，この数を $\theta_q(n)$ と略記する．さらに，$\mathbb{F}_q$ 上定義された代数多様体 V の $\mathbb{F}_q$-点の個数を $N_q(V)$ で表す．したがって，$N_q(\mathbb{P}^n) = \theta_q(n)$ である．
（２） X を $\mathbb{F}_q$ 上定義された $\mathbb{P}^n$ 内の次数 $d \geq 2$ の超曲面とする．$n \geq 3$ のとき，X が $\mathbb{F}_q$-超平面を成分に持たなければ，

$$N_q(X) \leq (d-1)q^{n-1} + dq^{n-2} + \theta_q(n-3)$$

が成り立つことを証明した．これを，われわれは elementary bound とよぶ．
証明は「数え上げ」の手法を用いる．これは，「研究開始当初の背景」の項で述べた我々の結果を得たときの手法を brush up したものである．
（３）さらに，$d=2$，$d=q+1$，（q が平方数，すなわち，e が偶数のとき，）$d=\sqrt{q}+1$ については，elementary bound の等号をとる例を構成した．これは，我々の得た上界は d について線形なものでは最良であることを意味する．また，既約曲面に限っても次数が q の近辺では既知のどの bound よりも良い．
（４）上記の例は次の通り．(ただし，以下の表では $\mathbb{F}_q$-射影同値を除いて記述してある．)
① $n=3, d=2$ のとき，X は $X_0X_1 - X_2X_3 = 0$ で定まる曲面;
② $n=3$, $d=\sqrt{q}+1$ のとき， Hermitian surface

$$X_0^{\sqrt{q}+1} + X_1^{\sqrt{q}+1} + X_2^{\sqrt{q}+1} + X_3^{\sqrt{q}+1} = 0;$$

③ $n=3, d=q+1$ のとき，

$$X_0^{q+1} + X_1^{q+1} + X_2^{q+1} + X_3^{q+1} = 0$$

で定まる曲面;

④ $n \geq 4$ のとき，上記 ①, ②, ③ の cone となる超曲面．以上 (2), (3) の結果は雑誌論文④として発表した．

（5）その後, $n=3$ の場合に elementary bound の等号をとるものの分類を試み，それらは (4) の ①，②，③に限ることを示した．この結果は雑誌論文②として発表したが，この結果の完成までにはやや紆余曲折があった．初期の段階では elementary bound の等号をとるような次数 d の可能性を絞りきれず，最も興味深い場合である $d=\sqrt{q}+1$ の場合から手をつけ，Preprint を完成させ arXiv のサイトに置いていた．後になって，次数の可能性を確定させたが，その論文②では，この arXiv 上の論文を引用する形で纏め出版が確定した．その直後に，この arXiv 上の論文の証明に瑕疵を発見し，その修正に時間を費やしたため，②で引用した論文①が後で出版されることになってしまった．(ただし，①は Springer の On-line First では，ほぼ同時期に up された．)

（6）さて，上記 elementary bound は「研究開始当初の背景」の項で述べた平面曲線の場合に我々が証明した bound の一般化と呼ぶにふさわしいものであろうか．elementary bound を記述する際に用いた $\theta_q(n)$ は $n=-1$ のときは意味は失うが $n \geq 0$ のとき，$\theta_q(n)=(q^{n+1}-1)/(q-1)$ であるから，$\theta_q(-1)=0$ と見做すのが自然であろう．とすると，elementary bound を平面曲線の場合に解釈すると $(d-1)q+d$ という自明な上界となってしまう．真に,「平面曲線の場合に我々が証明した bound の一般化と呼ぶにふさわしいもの」は③に発表した次の定理であろう．

（7）X を $\mathbb{F}_q$ 上定義された $\mathbb{P}^n$ 内の次数 $d \geq 2$ の超曲面とする．X に $\mathbb{F}_q$-直線が乗らなければ，$n=2$, $q=d=4$ の (1) で述べた例外曲線をのぞき，

$$N_q(X) \leq (q^{n-1}+1)+(d-2)(\theta_q(n-3)-1)$$

が成立する．

実際，この不等式の右辺で $n=2$ とすると「平面曲線の場合に我々が証明した bound」と一致する．また，$n=3$ の場合に，elliptic quadric surface では等号が成立する．

証明は次元に関する帰納法で行うのであるが，$q=d=4$ の場合には例外曲線があるため，直ちには平面曲線を帰納法の起点にできない．そこで $q=d=4$ の場合の曲面についてその平面切断で現れる曲線を詳しく調べることによって帰納法が機能することを確かめた．

〈 引用文献 〉

① P. Sziklai, *A bound on the number of points of a plane curve*, Finite Fields Appl. 14 (2008) 41–43.

② M. Homma and S. J. Kim, *Around Sziklai's conjecture on the number of points of a plane curve over a finite field*, Finite Fields Appl. 15 (2009), 468-474.

③ M. Homma and S. J. Kim, *Sziklai's conjecture on the number of points of a plane curve over a finite field* II, in: G. McGuire, G.L. Mullen, D. Panario, I.E. Shparlinski (Eds.), Finite Fields: Theory and Applications, 225–234, Contemp. Math., vol. 518, AMS, Providence, 2010.

④ M. Homma and S. J. Kim, *Sziklai's conjecture on the number of points of a plane curve over a finite field* III, Finite Fields Appl. 16 (2010) 315–319.

５．主な発表論文等

[雑誌論文]（計 6 件）

① M. Homma, S. J. Kim, The characterization of Hermitian surfaces by the number of points, J. Geom. 査読有, to appear, 2015 (on-line)
DOI: 10.1007/s00022-015-0283-1

② M. Homma, S. J. Kim, Number of points of surfaces in the projective 3-space over finite fields, Finite Fields Appl. 査読有, 35, 2015, 52–60
DOI:10.1016/j.ffa.2015.03.004

③ M. Homma, Numbers of points of hypersurfaces without lines over finite fields, Contemp. Math. 査読有，632, 2013, 151–156
DOI:10.1090/conm/632/12626

④ M. Homma, S. J. Kim, An elementary bound

for the number of points of a hypersurface over a finite field Finite Fields Appl. 査読有, 26, 2013, 76–83
DOI:10.1016/j.ffa.2012.11.002

⑤ M. Homma, S. J. Kim, Nonsingular plane filling curves of minimum degree over a finite field and their automorphism groups: supplements to a work of Tallini, Linear Algebra Appl. 査読有, 438, 2013, pp. 969–985
DOI:10.1016/j.laa.2012.08.032

⑥ M. Homma, A bound on the number of points of a curve in a projective space over a finite field Contemp. Math. 査読有，579, 2012, pp.103–110
DOI:10.1090/conm/579/11523

⑦ S. Fukasawa, M. Homma, S. J. Kim, Rational curves with many rational points over a finite field, Contemp. Math. 査読有，574, 2012, pp. 37–48
DOI:10.1090/conm/574/11420

[学会発表]（計 7 件）

① 本間正明, Number of lines on surfaces in the projective 3-space over finite fields, Workshop on Galois point and related topics, 2014 年 9 月 15 日, 滋賀大学大津サテライトプラザ

② M. Homma, Number of lines on surfaces in the projective 3-space over finite fields, JCCA2014, 2014 年 8 月 29 日, 文部科学省研究交流センター

③ M. Homma, Number of points of surfaces in the projective 3-space over finite fields, Combinatorics 2014, 2014 年 6 月 5 日, Hotel Serapo, Gaeta, Italy

④ M. Homma, Numbers of points of surfaces in $\mathbb{P}^3$ over $\mathbb{F}_q$, AGCT-13, 2013 年 12 月 3 日, IIT Bombay, Mumbai, India

⑤ M. Homma, Another generalization of the Sziklai bound, The 11th International Conference on Finite Fields and their applications, 2013 年 7 月 22 日, The Otto-von-Guericke University, Magdeburg, Germany

⑥ M. Homma, The characterization of Hermitian surfaces by the number of points, The 14th Arithmetic, Geometry, Cryptography and Coding Theory, 2013 年 6 月 5 日

⑦ M. Homma, An elementary bound for the number of points of a hypersurface over a finite field, Combinatorics 2012, 2012 年 9 月 13 日, Centro Congressi Hotel Gio, Perugia, Italy

６．研究組織

(1) 研究代表者

本間　正明　(HOMMA Masaaki)
神奈川大学・理学部・教授
研究者番号：８０１４５５２３