様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ９ 日現在

機関番号： １１５０１
研究種目： 基盤研究(C)
研究期間： 2012～2014
課題番号： ２４５４００６３
研究課題名（和文） 等質空間内の曲面のスピン幾何とループ群による構成

研究課題名（英文） Construction of surfaces in homogeneous spaces via spin geometry and loop groups

研究代表者
井ノ口　順一（INOGUCHI, JUN-ICHI）

山形大学・理学部・教授

研究者番号：４０３０９８８６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：３次元球面内のガウス曲率が１未満の曲面に対し、ガウス曲率が一定であることが法ガウス写像の調和性で特徴づけられることを証明した。ガウス曲率が一定で１未満（ただし0でない）の曲面のループ群論的構成法を与えた。とくにガウス曲率が負の曲面と正で１未満の曲面を同時に構成することに成功した。また３次元双曲空間内のガウス曲率が一定で－１より大きく0未満の曲面に対してもループ群論的構成法を与えた。
　スピン幾何とループ群論を組み合わせることにより、３次元ハイゼンベルグ群の極小曲面に対するループ群論的構成法を確立することに成功した。この構成法を用いて新しい極小曲面の例を与えた。

研究成果の概要（英文）：We showed that constancy of Gauss curvature of surfaces (of Gauss curvature less than 1) in the 3-sphere is characterized by the harmonicity of normal Gauss map. Based on this characterization, we established a loop group method for constructing negative constant Gauss curvature surfaces and surfaces of constant positive Gauss curvature (less than 1) in the 3-sphere simultaneously. We also obtain a loop group method for constructing surfaces of constant negative Gauss curvature (greather than -1) in hyperbolic 3-space. By combining spin geometry and loop group theory , we established a loop group method for constructing minimal surfaces in the 3-dimensional Heisenberg group. As an application, we give some new examples of minimal surfaces in the Heisenberg group.

研究分野： 幾何学

キーワード： ループ群　スピン幾何　曲面　調和写像　DPW法

１．研究開始当初の背景

(1) ３次元ユークリッド空間内の曲面に対し、その平均曲率の定値性はガウス写像（単位法線場）が調和写像であるという性質で特徴づけられる(調和写像は，エネルギー汎関数の停留点として定義される幾何学的変分問題の解である)。ガウス写像が 2 次元球面に値をもつ調和写像である事実に基づき、Dorfmeister, Pedit, Wu の 3 氏により 3 次元ユークリッド空間内の平均曲率一定曲面に対する「ループ群論的ワイエルシュトラウス構成法」が与えられた(1998)。この方法は現在「DPW 法」とよばれ「平均曲率一定曲面の微分幾何学」の中核である（引用文献①)。

２次元球面は、コンパクト・リーマン対称空間の典型例である。DPW 法は元来、リーマン面を定義域とし、コンパクト・リーマン対称空間に値をもつ調和写像の構成をループ群論を用いて与える理論である。DPW 法の理論では「像空間が、リーマン対称空間であること」が本質的であり対称空間でない等質空間に値をもつ調和写像への拡張は困難であり進展してこなかった。

(2) ３次元双曲空間においては、平均曲率一定曲面の性質や挙動は平均曲率の値により著しく異なる。平均曲率の値が１より大きい場合は 3 次元ユークリッド空間内の平均曲率一定曲面に対する DPW 法を移植することができる。また平均曲率の値が１の場合は３次元ユークリッド空間の極小曲面に対する「ワイエルシュトラス・エンネッパー表現公式」の類似である表現公式が得られている。

残された場合（平均曲率が１未満の平均曲率一定曲面）は３次元ユークリッド空間あるいは３次元球面内に対応物が存在しない双曲幾何特有の曲面である。３次元双曲幾何学の観点からは最も興味深い研究対象であるが DPW 法を適用することはできない。

前研究課題(基盤研究(C) 18540068 および 21540067)において、本研究者は「平均曲率一定曲面」と「実等質空間 SL(2,C)/U(1)への（特殊な）調和写像」との全単射対応を発見した。この５次元等質空間は対称空間ではないが、この空間 への 調和写像の構成法 を与えることに成功し、極小曲面を含む平均曲率一定曲面の構成法（新 DPW 法）を与えることに成功した。この新 DPW 法により 3 次元双曲空間内の新たな平均曲率一定曲面の構 成に成功した（J.F.Dorfmeister 氏,小林真平氏との共著論文として発表、引用文献②)。

(3)新 DPW 法の確立のために開発した「リーマン面で定義され対称空間でない等質空間に値をもつ調和 写像の構成法」 に関する研究成果が以下に挙げるクラスの曲面に適用可能であることが判明した。

① 3 次元双曲空間内のガウス曲率が負 で一定で -1 より大きい曲面は当初、自明な例(柱面）と回転面しか知られていなかった。完備な例の存在が Rosenberg 氏と Spruck 氏によって証明された (1994)が、具体的な構成法は 長く開発されないままであった。本研究者はこのクラスの曲面に対して、ループ群論的アプローチの 前提となる条件「平坦接続の１径数族の存在」(零曲率表示）か満たされることを証明した。

②Thurston 氏による３次元幾何学のモデル空間 （定曲率でない５種類の空間）において、「曲面の構成法」は（その重要さにも関わらず）長く手付かずの状態であった。極小曲面に限っても、いまなお強力な構成法は知られていない。本研究者が以前に得た３次元ハイゼンベルグ群（冪零リー群 Nil）内の極小曲面に対する積分表示公式」に「曲面の構造方程式のスピン幾何学的表現」を組み合わせることで、３次元ハイゼンベルグ群（冪零リー群 Nil） の極小曲面に対する零曲率表示の存在することが判明した。

２．研究の目的

本研究課題では、前研究課題(基盤研究(C) 21540067)において新 DPW 法の確立のために開発したループ群論に関する種々の技術を発展させ、３次元球面と３次元双曲空間内のガウス曲率一定曲面の構成法を与えること、およびスピン幾何を組み合わせることにより３次元ハイゼンベルグ群内の極小曲面の構成法を与えることを主要な目的とした。

(1) ３次元球面および３次元双曲空間内の曲面に対し、適切なガウス写像の概念を導入する。すなわち「ガウス曲率が一定」という性質が「ガウス写像の調和性」で特徴づけられるようなガウス写像を定式化する。この特徴づけを基礎としループ群論的構成法を確立する。

(2)スピン幾何・接触幾何の観点から３次元球面および３次元ハイゼンベルグ群に関する研究成果を再検討し、他の微分幾何学的問題・ソリトン方程式へ応用することも目的とした。

３．研究の方法

(1) ３次元球面は特殊ユニタリー群 SU(2) に両側不変リーマン計量を与えたものと同一視される。リー群構造を利用して、３次元球面内の曲面に対し、法ガウス写像の概念を導入する。法ガウス写像と他の（これまでに知られている）ガウス写像との関係を詳しく調べ、法ガウス写像から曲面を復元する方法、法ガウス写像をループ群論を用いて構成する方法を考察する。この研究過程を通じて、３次元球面と 3 次元双曲空間とを比較対照し３次元双曲空間内のガウス曲率一定曲面の構成法確立を目指す。

(2)新 DPW 法では３次元双曲空間をリーマン対称空間 SL(2,C)/SU(2)として表示し SL(2,C)のループ群を用いている。一方、３次元双曲空間は SL(2,C)の可解部分群と同一視できる。この事実に着目し、新 DPW 法を他の「３次元リー群」内の極小曲面に対して拡

張することを考察する。具体的には３次元冪零リー群（ハイゼンベルグ群）内の極小曲面を対象とする。

４．研究成果

(1) David Brander 氏（デンマーク工科大学）・小林真平氏（北海道大学）と共同研究を行い３次元球面内のガウス曲率一定曲面に対するループ群論的構成法を確立した。
３次元球面を特殊ユニタリ群 SU(2)に両側不変リーマン計量を与えたものと同一視する。SU(2)のリー群構造を用いて SU(2)内の曲面の単位法ベクトル場を原点（単位元）に引き戻すことで２次元球面に値をもつ写像（法ガウス写像）を得る。ガウス曲率が１未満であるとき第二基本形式は曲面上にローレンツ面の構造（共形構造）を与える。この共形構造に関し法ガウス写像が（ローレンツ）調和であるための必要十分条件はガウス曲率が一定であることを証明した（ルー・ヴィルムス型定理)。ルー・ヴィルムス型定理を出発点としガウス曲率が一定で１未満（ただし 0 でない）の曲面のループ群論的構成法を与えた。とくにガウス曲率が負の曲面と正で１未満の曲面を同時に構成することができることは特筆すべき点である。さらにガウス曲率を０および１に近づける極限操作も考察した。これらの成果を Brander 氏、小林氏との共著論文②として発表した。また学会発表③,④で発表した。

(2)Josef Dorfmeister 氏（ドイツ・ミュンヘン工科大学）・小林真平氏（北海道大学）と共同研究を行い，以下の成果を得た。

①３次元ハイゼンベルグ群内の曲面に対し、(研究成果(1)で３次元球面内の曲面に対し導入した）法ガウス写像を双曲平面に値をもつように改変し極小性を法ガウス写像の調和性で特徴づけた。この特徴づけを出発点としハイゼンベルグ群の極小曲面に対するループ群論的構成法を考察した。今までループ群論的構成法が確立された３次元空間はすべて定曲率空間であり、等長変換群が最大次元６をもつ。等長変換群はガウス写像の像空間の等長変換群でもある。ハイゼンベルグ群の等長変換群は４次元(ハイゼンベルグ群自身による平行移動と１次元の回転)であり、法ガウス写像の像空間である双曲平面の等長変換群　SU(1,1)はハイゼンベルグ群の等長変換群とは直接の関係がない。したがって双曲平面への調和写像に DPW 法を適用しても直ちに極小曲面を得ることはできない。曲面のスピン構造を利用して、極小曲面の位置ベクトル場を得る公式（Sym 型公式）を得ることでこの問題点を克服した。

②この構成法を用いて当新しい極小曲面を与えた（螺旋面のスペクトル変形)。
これらの成果は論文 Dorfmeister 氏，小林氏との共著論文①として発表した。また学会発表⑤,⑥,⑦,⑨,⑪(論文⑩)において口頭発表を行った。

(3) 研究成果(2)で得られた結果と前研究課題（基盤研究(C) 21540067）で得た新 DPW 法を組み合わせることにより３次元双曲空間内のガウス曲率が負で一定で-1 より大きい曲面に対するループ群論的構成法を得た（論文を準備中)。

(4)　研究成果(1)～(3)において適切なガウス写像の概念を導入することが出発点であった。一般の３次元等質空間内の曲面に対し、接ガウス写像(tangential Gauss map)が調和写像となるための必要十分を Van der Veken 氏（ルーバン大学）との共同研究で求めた。定曲率でない等質空間においては平均曲率一定かつ接ガウス写像が調和である曲面は限定されることを証明した。雑誌論文④として発表した。

(5)３次元球面およびハイゼンベルグ群はともに３次元リー群であることに着目し研究成果(1)と(2)を「リー群に値をもつ調和写像」の観点から再検討を行った。両側不変計量を備えたコンパクト半単純リー群に値をもつ調和写像に関しては Uhlenbeck 氏と Segal 氏による構成理論が確立されているがこの理論においては計量の両側不変性が本質的であり、一般のリー群への一般化はできない（ハイゼンベルグ群も該当する)。調和写像の方程式はリー群から計量を捨象し、不変接続を用いても意味をもつことに着目した。中立接続とよばれる不変接続に関する調和写像は零曲率表示をみたし、ループ群論的構成法が確立できることを証明した。像空間であるリー群がコンパクト半単純で両側不変計量を与えた場合は Uhlenbeck-Segal 理論を復元する。したがって Uhlenbeck-Segal 理論のひとつの一般化に成功したと言える。Dorfmeister 氏・小林真平氏との共著論文として発表する予定である。

(6)ガウス曲率一定曲面のループ群論的構成を数値解析的観点から理解するために、曲線及び曲面の離散化を行う事が有効である。

①この観点から捩率一定空間曲線の離散化を梶原健司氏（九州大学）・松浦望氏（福岡大学）・太田泰広氏（神戸大学）と共同で研究し、 離散化された空間曲線（差分空間曲線）のタウ関数による具体的表現を与えた。この成果は４人の共著論文（雑誌論文③）として発表した。

② Bao-Feng Feng 氏（テキサス大学)、梶原健司氏、丸野健一氏（早稲田大学）と共同研究を行い、以前に得ていた「差分 mKdV 方程式の解から定まる差分平面曲面の運動」を介して Dym 方程式の離散化を導出した。この成果は Feng 氏、梶原氏，丸野氏との共著論文（雑誌論文⑨）として発表した。
以上①,②の成果は学会発表⑧,⑩においても発表した。

③これまで離散曲線の研究に関しては、離散曲線の時間発展を考えることが主であり、離散曲線そのものについての研究が少ない。加藤慎也氏（山形大学）との共同研究を行い、

加藤慎也氏（山形大学大学院）との共同研究で、基本的な平面曲線であるハイポサイクロイドの離散化を考察した。 この成果は学会発①で発表した。
(7)サーストン幾何学における８つのモデル空間はすべて３次元等質概接触リーマン空間である。Sol とよばれる空間以外はすべて正規(normal)という性質をもつ。特に３次元球面およびハイゼンベルグ群はともに等質正規接触多様体（佐々木空間形）である。(一般の）３次元等質空間内の曲線と曲面の微分幾何を展開するために、研究指針となる具体例を豊富に得ておく必要がある。

①Ji-Eun Lee 氏（韓国・全南大学）と共同研究を行い、これらの空間内の概接触曲線で特別な性質をもつ例の研究を行った（雑誌論文⑧,⑪として発表した。また⑥でも報告した)。

②概接触曲線の研究過程で得た常微分方程式の解法が２次元定曲率リーマン多様体内の重極小曲線(biminimal curve)の分類に応用可能であることが判明した。そこで論文⑫において Ji-Eun Lee 氏と２次元球面および双曲平面内の重極小曲線を分類し、ヤコビの楕円関数を用いた具体的表示式を与えた。

③古典的な静磁場に関する荷電粒子の運動は，一般のリーマン多様体に自然に拡張できる（磁場は閉２次微分形式として定義される)。測地線の方程式に磁場の作用を受けた項が添加されたものとして荷電粒子の軌道方程式が導かれる。Marian Ioan Munteanu 氏（ヤシ大学）との共同研究で３次元ベルジェ球の標準的接触構造から誘導される磁場について閉軌道の分類を行った。(共著論文を準備中)。またこの研究過程において定義域を１次元から一般次元に拡張する可能性が見いだされた。Munteanu 氏と共同研究を継続し、ベクトル場を指定したリーマン多様体から磁場を指定したリーマン多様体への写像に対し、磁場をもつ調和写像(magnetic map)の概念を導入し，その偏微分方程式を導出した。さらにいくつかの基本的具体例を構成した。この成果は雑誌論文⑦として発表した。

(8)リーマン多様体の間の調和写像のひとつの一般化として重調和写像(biharmonic map)の概念が提起され研究が進展している。像空間が正曲率の場合については球面・複素射影空間・四元数射影空間およびベルジェ球（佐々木空間形）の場合に重調和部分多様体の例が知られている。これら以外の正曲率空間の場合に重調和部分多様体の例は知られていなかった。いくつかのコンパクト既約リーマン対称空間内の等質超曲面で重調和であるものを分類した。とくに階数１の既約リーマン対称空間の等質実超曲面で重調和であるものの分類を完了した。この成果は学会発表②で成果発表を行った。笹原徹氏（八戸工業大学）との共著論文を準備中である。

＜引用文献＞

①J.Dorfmeister, F.Pedit and H.Wu, Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces, Communications in Analysis and Geometry 6(1998), no.4, 633-668.
② J.F.Dorfmeister, J.Inoguchi and S.-P.Kobayashi, Constant mean curvature surfaces in hyperblic 3-space via loop groups, Journal fur die reine und angewandte Mathematik 686(2014), no. 1, 1-36

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１３件）

①J.F. Dorfmeister, J. Inoguchi and S.P.Kobayashi, A loop group method for minimal surfaces in the three-dimensional Heisenberg group, Asian Journal of Mathematics, 印刷中，査読有.

②D.Brander, J.Inoguchi and S.P.Kobayashi, Constant Gaussian curvature surfaces in the 3-sphere via loop groups, Pacific Journal of Mathematics, 269 (2014), 281-303.
DOI: 10.2140/pjm.2014.269.281

③J.Inoguchi, K.Kajiwara, N.Matsuura, and Y.Ohta, Discrete mKdV and discrete Sine-Gordon flows on discrete space curves, Journal of Physics A 47 (2014), 235202, 査読有.
doi:10.1088/1751-8113/47/23/235202

④J.Inoguchi, and J. Van der Veken, Gauss maps of constant mean curvature surfaces in 3-dimesional homogeneous spaces, Kobe Journal of Mathematics 31(2014), 45-62. 査読有.

⑤ J.Inoguchi, Harmonic maps in almost contact geometry, SUT Journal of Mathematics 50(2014), 353-382. 査読有.

⑥井ノ口順一，３次元接触多様体の部分多様体論，京都大学数理解析研究所講究録 1880(2014), 72-99. 査読無.

⑦J.Inoguchi, M.I.Munteanu, Magnetic maps, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics 11(2014), no.6, 1450058 (22 pages). 査読有.
DOI: 10.1142/S021988781450058

⑧J.Inoguchi and J.-E.Lee, On slant curves in normal almost contact metric 3-manifolds, Beitrage zur Algebra und Geometrie 55 (2014), 603-620. 査読有.
DOI: 10.1007/s13366-013-0175-1

⑨B.-F.Feng, J.Inoguchi, K.Kajiwara, and M. Maruno, Integrable discretization of the Dym equation, Frontiers of Mathematics

in China 8(2013), 1017-1029. 査読有.
DOI: 10.1007/s11464-013-0321-y
⑩井ノ口順一, 3 次元等質空間内の曲面と可積分系, 九州大学応用力学研究所研究集会報告 24AO-S3 (2013), 58-63.
⑪J.Inoguchi and J.-E.Lee,
Almost contact curves in normal almost contact 3-manifolds, Journal of Geometry 103 (2012), 457-474. 査読有.
DOI:10.1007/s00022-012-0134-2
⑫J.Inoguchi and J.-E.Lee,
Biminimal curves in 2-dimensional space forms, Communications of the Korean Mathematical Society 27 (2012), 771-780. 査読有.
http://dx.doi.org/10.4134/CKMS.2012.27.4.771
⑬井ノ口順一,曲面の差分幾何, 京都大学数理解析研究所講究録別冊 B301(2012), 77-99. 査読有.

〔学会発表〕(計１１件)
①井ノ口順一,加藤慎也 , 平面離散曲線の例について, 非線形波動研究の現状. 課題と展望を探る, 2014 年10月３１日, 九州大学応用力学研究所 (福岡県春日市) .
② Jun-ichi Inoguchi, New examples of biharmonic hypersurfaces,International Workshop on Finite Type Submanifolds, 2014 年 9 月 4 日, イスタンブール (トルコ)。
③Jun-ichi Inoguchi,
Methods of Integrable Systems in Differential Geometry, 2014 International Conference of the Honam Mathematical Society, 2014 年 6 月 27 日, 光州市(韓国)。
④井ノ口順一, 3 次元球面内のガウス曲率一定曲面, 写像の特異点論及び関連する科学の諸問題, 2014 年 6 月 7 日, 都城工業高等専門学校 (宮崎県都城市)。
⑤井ノ口順一, 曲面の可積分幾何, 第９回代数・解析・幾何学セミナー, 2014 年 2 月１９日, 鹿児島大学 (鹿児島県鹿児島市)。
⑥Jun-ichi Inoguchi, Minimal surfaces in the Heisenberg group via loop groups, 第２回日本スペイン幾何学研究集会, 2014 年 2 月 9 日, 東京工業大学(東京都目黒区).
⑦井ノ口順一, ３次元接触多様体の部分多様体論, 部分多様体の微分幾何学の深化, 2013 年 6 月 25 日, 京都大学数理解析研究所 (京都市)。
⑧Jun-ichi Inoguchi,
Discrete Differential Geometry of Curves, Low Dimensional Topology and Geometry Symposium, 2013 年１月９日, 光州市(韓国)。
⑨Jun-ichi Inoguchi,
Minimal surfaces in 3-dimensional Sasakian space form. The case Nil, Discrete Differential Geometry of Curves, Low Dimensional Topology and Geometry Symposium, 2013 年１月８日, 光州市(韓国)。
⑩井ノ口順一,
On discrete flows of discrete curves, Workshop on Curves and Integrable Systems, 2013 年 12 月８日, 早稲田大学 (東京都新宿区)。
⑪井ノ口順一,
３次元等質空間内の曲面と可積分系, 非線形波動研究の最前線. 構造と現象の多様性, 2012 年 11 月 3 日, 九州大学応用力学研究所 (福岡県春日市)。

６. 研究組織
(1)研究代表者
井ノ口　順一 (INOGUCHI JUN-ICHI)
山形大学・理学部・教授
研究者番号：40309886

(2)研究分担者
(　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　)

研究者番号：