様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ９ 月 ２４ 日現在

機関番号：１２４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４００６７

研究課題名（和文）曲面の特異点論的研究

研究課題名（英文）Research on surface from singular view point

研究代表者
福井　敏純（FUKUI, Toshizumi）

埼玉大学・理工学研究科・教授

研究者番号：９０２１８８９２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：特異点論の立場から３次元ユークリッド空間内の特異曲面の研究を行った。
ホイットニーの傘状の高さ関数の特異点を研究し、その特異点型の分類を、平面との切り口との関連を明らかにする形で与えた。高さ関数との特異点型だけでは、平面と切り口に現れる平面曲線の特異点は決まらず、さらに平面とホイットニーの傘の２重点軌跡を見ることにより平面と切り口に現れる平面曲線の特異点型が決まることを示した。これは、長谷川大氏との共同研究である。ホイットニーの傘と平面との接触を研究する第一歩と言ってよく、重要な成果と考えている。また重み付き錐での主方向の特徴等を解析した論文も発表した。

研究成果の概要（英文）：We investigate singular surface in the three dimensional euclidean space from singularity theory point of view. We obtain Koendrink type theorem for Whitney umbrella singularities with respect to the singularity type of their plane section. We found the contact of double point locus with the plane come to enjoy. This is an important result since it is the first step to understand the contact of singular surfaces with planes. We also obtain an asymptotic formula of principal curvature and principal direction for weighted cone singularities.

研究分野：特異点論

キーワード：特異曲面　特異点論

１．研究開始当初の背景

I. Portious は論文

The normal singularities of a submanifold, Journal of Geometry 5 (1971), 543–564

で、ユークリッド空間内の部分多様体は、その距離二乗関数の特異点を調べることにより、曲率半径、曲率中心と言った微分幾何的不変量がそれらといかに関係するかを明らかにした。現在では、３次元ユークリッド空間内の曲面の高さ関数および距離二乗関数の特異点がどのように微分幾何の諸概念と結びつくかはかなり広く認識されているといってよい。

論文

T. Fukui and J. Nuño Ballesteros, Isolated roundings and flattennings of submanifolds in Euclidean space, Tohoku Mathematical Journal, 57 (2005), 469–503.

では、この立場を更に推め、曲面の高次元ユークリッド空間への埋込や、3 次元ユークリッド空間内の特異曲面に対して、同じアイデアがどのように有効かを示した。

論文

K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, The geometry of fronts, Annals of Mathematics (2) 169 (2009), 491–529.

では、フロントという曲面の特異点に特異曲率を定義し、その解析がなされている。フロントとは、位置ベクトルと単位法ベクトルを並べて作る写像が、接束への埋め込みに拡張する事を要請する曲面で、非特異曲面の平行曲面の解析がこの定義の１つの動機である。

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の特異曲面の代表例として、ホイットニーの傘が挙げられる。特異点論の立場からは安定特異点と呼ばれるものの代表例であり、特異性の低い特異点であると考えられる。しかしながらこの場合ですら主曲率の特異点近傍での振舞は、研究代表者等の成果

T. Fukui and M. Hasegawa, Fronts of Whitney umbrella, a differential geometric approach via blowing up. Journal of Singularities, 4 (2012), 35–67.

でブローアップを用いることにより初めて明らかにされた。

２．研究の目的

特異点論の立場から曲面を研究する事が目的である。特異点論では写像を研究対象とするが、平面の領域で定義された写像の像は、曲面として幾何学な研究対象となる。本研究では、特異点を持つかも知れないそのような曲面を研究する際、特異点論がいかに有効な方法であるかを示す。また、その文脈から派生する特異点のタイプの判定法や、曲率線網や漸近線網の類似物の研究を行う。

３．研究の方法

研究代表者を、共同研究者の許へ出張させ、また共同研究者を研究代表者の許へ出張させ、フェイスツーフェイスで、特異点論的立場からの曲面論に関するセミナーなど行う。主には特異曲面に高さ関数や距離自乗関数を制限しその特異点型の判定や、高さ開折や距離２乗開折の普遍性の判定条件を議論することが定石といえるので、その定石に沿いながらも派生する問題に目を配りつつ計算を行うのが研究方法である。

４．研究成果

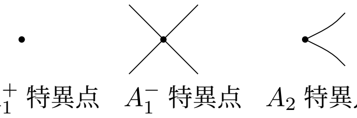
ホイットニーの傘状の高さ関数の特異点を研究し、その特異点型の分類を、平面との切り口との関連を明らかにする形で与えた。高さ関数との特異点型だけでは、平面と切り口に現れる平面曲線の特異点は決まらず、さらに平面とホイットニーの傘の２重点軌跡を見ることにより平面と切り口に現れる平面曲線の特異点型が決まることを示した。これは、長谷川大氏との共同研究であり、以下の論文として発表されている。

T. Fukui and M. Hasegawa, Height functions on Whitney umbrellas (Singularity theory, geometry and topology) RIMS Kokyuroku Bessatsu B38 (2013), pp. 153–168.

以下、本論文の内容を概観しよう。本論文の手法はポーラーブローアップという写像で、曲面上の高さ関数を引き戻して解析する事が主た

るアイデアである。ホイットニーの傘が解析的写像の像で定義されているとすると、単位法ベクトルをポーラーブローアップで引き戻すと、それは解析的に拡張可能であり、第二基本形式等を考えることができる。第一基本形式は退化するが、その点を除けば微分幾何的な不変量は定義でき、主曲率が定義され、ガウス曲率や平均曲率も有理関数として考える事ができる。次に重要なのは論文中に式 (2.1) として定義されている、ホイットニーの傘の微分幾何的な意味での標準形である。これらの係数は外在的な意味でのホイットニーの傘の微分幾何的不変量であり、これらの量を使って高さ関数の特異点の精密な解析が可能になるのである。論文では、主曲率を対応する主方向で微分して 0 になる点を峰点と定め、さらに繰り返し同じ主方向で主方向を微分して 0 になる階数を見てという性質ををブローアップに拡張した峰点の位数を定義している。言い換えると、曲率線上の対応する主曲率の特異点が $\pm x^{k+1}$ で近似されるとき、k 次の峰点と呼ぶのである。

まず論文ではホイットニーの傘の周りには、放物点軌跡がたかだか 1 つしか現れないことを注意している。ブローアップの例外集合と横断的に交わる場合が楕円的ホイットニーの傘で交わらない場合が双曲的ホイットニーの傘、放物点軌跡が例外集合と接する場合が放物的ホイットニーの傘となるのである。次に、高さ関数の特異点の判定を述べている。高さ関数（のブローアップでの引き戻し）が特異点を持つことは高さ方向が、単位法ベクトル（のブローアップでの引き戻し）となることであり、楕円的点では A_1^+ 特異点、双曲的点では A_1^- 特異点、放物的点で峰点でなければ、A_2 特異点である事が示せた。これらの場合付随する高さ開析は R^+ 普遍でありガウス写像による放物軌跡の像は非特異であることもわかる。



A_1^+ 特異点　A_1^- 特異点　A_2 特異点

更に、放物的点が 1 次の峰点であれば高さ関数は A_3 特異点であり、更に楕円的ホイットニーの傘であれば付随する高さ開析は $\mathcal{R}^+$ 普遍であり、ガウス写像による放物軌跡の像は尖点であることもわかる。高さ関数が D_4 かそれより悪い特異点を持ち得ないことも分かる。

以上は、ホイットニーの傘上の高さ関数の特異点型の特徴付けであり、ホイットニーの傘と平面との共通部分について、何がしかの情報を与えている筈であるが、その共通部分に現れる平面曲線の特異点を完全に決めているわけではない。この論文の残りの部分は何がその特異点型を決定するかを議論している。それを以下に述べよう。ホイットニーの傘の 2 重点軌跡の接方向（を更にブローアップで引き戻したもの）が、単位法ベクトルの直交平面に含まれる時とそうでない時で様子が異なる。後者の場合は、高さ関数が A_k 特異点であれば、ホイットニーの傘の対応する平面断面は A_{k+2} 特異点である。前者の場合は、状況は複雑である。高さ関数が非特異で 2 重点軌跡と対応する平面が $2k$ 点接触をすればホイットニーの傘の対応する平面断面は A_{2k} 特異点である。更に高さ関数の零点集合の接方向でない成分と 2 重点軌跡が $2k+1$ 点接触すればホイットニーの傘の対応する平面断面は D_{2k+3} 特異点である。

この成果はホイットニーの傘と平面との接触を研究する第一歩と言ってよく、重要な成果と考えている。付言すると、$\mathbb{R}^3$ 内の 2 つの正則曲面の接触型とは、2 つの正則曲面の対を微分同相で写せるとき同値とみなしてできる同値関係の同値類であるが、これは 2 つの正則曲面の共通部分として現れる曲線の定義イデアルの微分同相類である。モンタルディの定理である。特異曲面の場合この定理がどのような一般化を許すかは全く未知であるが、本結果はホイットニーの傘と平面との接触の解析に第一歩を踏み出したと見做せるのである。

また重み付き錐での特異点近傍での主曲率や主方向の漸近的振る舞いも解析し、次の論文を発表した。

T. Fukui and M. Hasegawa, Fronts of weighted cones, Topics on Real and complex singularities, Proceeding of the fourth Austrarian-Japanese workshop on real and complex singularities, World Scientific, 2014.

その他にホイットニーの傘に対するケンデリンク型定理や、ホイットニーの傘より退化した S 型単純特異点とよばれるクラスの距離 2 乗関

数や高さ関数の計算も行っているが、論文準備中である。この結果より平行曲面の特異点型がいくつかの場合に決定できる。

５．主な発表論文等（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

① T. Fukui and M. Hasegawa, Fronts of weighted cones, Topics on Real and complex singularities, Proceeding of the fourth Austrarian- Japanese workshop on real and complex singularities, 31–49 World Scientific, 2014.
査読有

② T. Fukui and M. Hasegawa, Height functions on Whitney umbrellas (Singularity theory, geometry and topology) RIMS Kokyuroku Bessatsu B38 (2013), pp. 153–168.
査読有

③ T. Fukui and M.Hasegawa, Fronts of Whitney umbrella —a differential geometric approach via blowing up, Journal of Singularities, Vol.4 (2012), 35—67
査読有
`http://www.journalofsing.org/volume4/article3.html`

〔学会発表〕（計 0 件）

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）
名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）
名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1) 研究代表者
福井敏純（FUKUI, Toshizumi）
埼玉大学・理工学研究科・教授
研究者番号：90218892

(2) 研究分担者
（　　）
研究者番号：

(3) 連携研究者
研究者番号：