

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 1 日現在

機関番号：12605

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540068

研究課題名(和文)ホモロジーシリンダーに関わる不変量の関係解明とその応用

研究課題名(英文)A study on the relationship between invariants of homology cylinders, and its applications

研究代表者

合田 洋(GODA, HIROSHI)

東京農工大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：60266913

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：ホモロジーカーリーファイバー結び目のうち、特に2橋結び目になるものの焦点をあて、そのモノドロミー写像の写像類の表示の明示的な公式を得た。そしてそれを用いてこれまでに得られていた公式とは異なるアレキサンダー多項式の公式を得た。さらにモノドロミーに関するこの公式を使ったコンピュータ計算により、最小交点数12までのホモロジーカーリーファイバー2橋結び目のモノドロミーを具体的にあたえ、その表を作成することが出来た。

研究成果の概要(英文)：We focused on 2-bridge fibered knots, whose family is a subset of homologically fibered knots. Then, we obtained a formula of a presentation of its monodromy map as an element in Automorphism of free groups. Using this formula, we gave a formula of the Alexander polynomial. We made a table of elements in Automorphism of free groups, which shows the monodromy maps of homologically fibered 2-bridge knots up to 12 crossings.

研究分野：数物系科学，数学，幾何学

キーワード：ホモロジーシリンダー ファイバー結び目 写像類 モノドロミー

### 1. 研究開始当初の背景

1970年代、曲面の写像類群を研究するためにジョンソン氏は写像類群からあるリー代数への準同型写像の族を与えた。この考察を森田茂之氏はさらに推し進め、ジョンソンの写像は全射とはならないことを証明した。一方、有限型不変量を研究する舞台として、葉廣氏、Gussarov氏らによってホモロジ-シリンダーという概念が導入されたが、これは写像類群を含む構造を持っている。Garoufalidis-Levineは、ジョンソンの準同型写像はその定義域をホモロジ-シリンダーに広げることができ、そしてこのとき写像は全射になることを証明した。これによって、ホモロジ-シリンダー上で有限型不変量や写像類群の研究が展開できることが可能になった。

連携研究者の方との先行共同研究において、ホモロジ-シリンダーを結び目補空間に持つ結び目(ホモロジカリーファイバー結び目)の代数的特徴を明らかにし、ファイバー結び目は自然にその真部分集合になることを観察した。そして、ホモロジ-シリンダーの不変量として研究されてきた基本群のマグナス表現、ライデマイスタートーションを応用し、与えられたホモロジカリーファイバー結び目がファイバー結び目になるか否かを判定する必要条件を得た。

ホモロジカリーファイバー結び目のうち、ファイバー結び目でない結び目は交点数12の結び目から現れ、交点数が12のものは13個ある。連携研究者の方との先行共同研究において、この13個の結び目の補空間のマグナス表現から得られる不変量、トーション不変量の計算に成功した。その結果、これらの非ファイバー性がこれらの不変量いずれによっても判定出来ることがわかった。この計算は、結び目にザイフェルト膜を張りそこから得られる情報を整理した上に、最後はコンピュータを使い行われた。そして、Higher-orderアレキサンダー不変量がこのトーションとマグナス表現から得られる不変量に関わる部分に分解できることを証明した。

また、ホモロジ-シリンダーがなすモノイドのアーベル商が有限生成でないことを、suturedフロア-ホモロジ-シリンダーを使って証明した。写像類群のそれが一般に自明であることから、ホモロジ-シリンダーのモノイドが写像類群と比較して非常に大きいことが判明した。

さらに、ジョンソン準同型を使い、ホモロジカリーファイバー結び目がファイバー結び目からどの程度離れているかを表す尺度となる量 $J(K)$ を定義した。この量は2以上の自然数の値をとり、小さい程ファイバー結び目と離れていることを表す指標である。特に、 $K$ がファイバー結び目のときは $J(K)=$ となる。まず最初に交点数が12のホモロジカリーファイバー結び目に対してこの量を計算

した。その結果、これらの結び目に対してはいずれも $J(K)=2$ となった。

一方で、ファイバー結び目でないにもかかわらず $J(K)=$ となるホモロジカリーファイバー結び目が無限個存在することを証明した。また任意の自然数 $n$ に対して、 $J(K)=n$ となる結び目が存在することも判明していた。

一方で、当時Massuyeau-Meilhanによって、ホモロジ-シリンダーを変形するクラスパー手術と呼ばれる操作に関する同値関係によるホモロジ-シリンダーの分類がなされた。そこでは、ジョンソンの準同型とキャッソン不変量が重要な役割をはたしていた。

### 2. 研究の目的

写像類群や有限型不変量の研究において大切な役割をはたしているホモロジ-シリンダーおよびその結び目版：ホモロジカリーファイバー結び目に関わる不変量の関係解明とその応用を当研究の目的とした。具体的には

- (1) ホモロジ-シリンダーに対する幾何学的操作であるクラスパー手術に対応する、ホモロジカリーファイバー結び目に対する操作の系統的解釈を与えること
- (2) ホモロジ-シリンダーに関わる様々な不変量の関係を解明すること

を研究目的とした。

ホモロジ-シリンダーおよびString linkは研究の歴史がまだ浅く、それぞれの舞台での言葉が少ない欠点がある。結び目理論はこれらと比べると様々な先行研究があり、数学的概念や結果が豊富である。当研究を通じて、ホモロジ-シリンダーについては写像類群の研究を結び目理論の言葉を用いて少しでも深めることも一つの目的とした。

### 3. 研究の方法

本研究は比較的広範囲のトポロジーの分野に関わるものなので、研究代表者が得てきた幾何学的な知見を基に、連携研究者やその他研究の最前線で活躍されている研究者の方々から最新研究情報の提供を受けながら、多角的に研究課題を見つめ遂行した。具体的には、2012年11月にフランス・マルセイユで行われた日仏共同セミナー「Aspects of representation theory in low-dimensional topology」や2013年8月にアメリカ合衆国ニューヨーク、コロンビア大学で行われた「Geometric Topology in New York」に参加し、当該分野の研究の最新情報を収集した。2013年1月には「The 9<sup>th</sup> East Asia School of knots and Related Topics」のOrganizing Committeeを務め、主に韓国の当該分野の研究者の方達と研究打ち合わせ等を行った。

さらに、2013年6月と2014年6月に2橋結び目およびホモロジ-シリンダーを研究されている広島大学、奈良女子大学の研究者の方々から東京農工大学にて専門的知識の提

供を受けた。  
一方で、いくつかの研究集会で研究発表させて頂きレビューを受けた。特に、学会発表の後を受けた研究上のアドバイスや参考文献については非常に役に立った。  
また、本研究全体を通して具体例の計算が新しい知見を得るために重要な働きを考えると考えられたので、数式処理システム MATHEMATICA およびそれが必要とする性能が伴ったコンピュータを購入し、計算を多く行った。MATHEMATICA の扱いに明るい研究者の方の協力を得て、最小交点数 12 までのホモロジカリーファイバー2 橋結び目に関わる様々な計算を行った。  
その後の研究過程にて、双曲幾何および複素微分形式に関する専門的知識が必要であることが判明し、専門書を購入し勉強・検討を行った。

#### 4. 研究成果

研究初期の段階で、ホモロジカリーファイバー結び目は当初想像したよりもはるかに複雑で非常に多く存在することが判明した。  
デルタ move を2重にした double デルタ move を最初の研究対象としたが、具体的にこの操作を扱うのは非常に困難が伴うことが明らかになった。そこで、ホモロジカリーファイバー結び目のうち、特に2橋結び目に焦点をあて研究を進め、そのモノドロミー写像類の表示の明示的な公式を得た。そしてそれを用いて、これまで知られていた公式とは異なるアレキサンダー多項式の公式を得た。またモノドロミーに関するこの公式を使ったコンピュータ計算により、最小交点数 12 までのホモロジカリーファイバー2 橋結び目のモノドロミー写像の自由群の自己同型写像の元としての表示を具体的に与え、その表を作成することが出来た。この内容は「Monodromy maps of fibered 2-bridge knots as elements in Automorphism of free groups」というタイトルの論文にまとめている。  
近年、写像類群の研究が様々な観点から進んでいるが、写像類の自然な具体的な表示例というのはあまり知られてないようである。上述の結果は写像類群の様々な研究結果に係わる具体例を示したり、その研究過程における思考実験の材料に適していると考えている。  
その後、ホモロジ-シリンダーのライデマイスタートーションと体積を比較するためにいくつかの例の計算を行った。基本群の表現に依存する不変量の計算をコンピュータも利用して行ったが、結び目補空間の体積を精密に求めようとすればするほど、計算に使う行列のサイズが大きくなる。コンピュータで可能な限り計算を行ったが、最終的に求めたいその(行列のサイズ無限大という意味での)極限値を得るまでには至らなかった。今後、この研究で得られた結果が一般的な定理

を得るための礎になることを期待している。この計算において上述したモノドロミー写像の表示に関する結果が利用できないか考察したが、満足する結果は得られなかった。さらなる工夫が必要と考えられる。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

##### [雑誌論文](計4件)

Hiroshi Goda, Hiroshi Matsuda, Andrei Pajitnov, Morse-Novikov theory, Heegaard splittings, and closed orbits of gradient flows, Algebra i Analiz, 査読有, Vol.26,2014, 131-158.  
<http://www.mathnet.ru/php/journal.php?tm?jrnid=aa>

Hiroshi Goda, Takuya Sakasai, Homology cylinders and sutured manifolds for homologically fibered knots, Tokyo Journal of Mathematics, 査読有, Vol.36, 2013,85-111.  
<http://projecteuclid.org/euclid.tjm>

Hiroshi Goda, Chuichiro Hayashi, Genus two Heegaard splittings of exteriors of 1-genus 1-bridge knots II, Saitama Mathematical Journal, 査読有, Vol.29, 2012,25-53.  
<http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/research/index.html>

Hiroshi Goda, Chuichiro Hayashi, Genus two Heegaard splittings of exteriors of 1-genus 1-bridge knots, Kobe Journal of Mathematics, 査読有, Vol.29, 2012,45-84.  
<http://www.math.kobe-u.ac.jp/jmsj/kjm/>

##### [学会発表](計5件)

合田 洋, 8 の字結び目の高次ねじれアレキサンダー多項式, 第38回トポロジーセミナー, 2015年3月17日, 伊東市山喜旅館。

合田 洋, 双曲幾何とライデマイスタートーション, 慶應トポロジーセミナー, 2015年2月2日, 慶應大学経済学部。

合田 洋, ファイバー結び目とねじれ Alexander 不変量, 第60回 Encounter with Mathematics: 結び目理論とその不変量をめぐって, 2013年5月18日, 中央大学理工学部。

合田 洋, ねじれアレキサンダー不変量とファイバー3次元多様体, 日大トポロジーセミナー, 2013年4月16日, 日本大学文理学部。

合田 洋, Monodromies of fibered 2-bridge knots, 群馬大学トポロジーセミナー, 2013年2月4日, 群馬大学教育

学部 .

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.tuat.ac.jp/~goda/jindex.html>

6 . 研究組織

(1)研究代表者

合田 洋 (GODA HIROSHI)

東京農工大学・大学院工学研究院・教授

研究者番号：60266913

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

逆井 卓也 (SAKASAI TAKUYA)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：60451902