

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 3 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24540069

研究課題名(和文) 複素多様体の一意化、双曲性、およびネヴァンリンナ理論の研究

研究課題名(英文) Uniformization, hyperbolicity, and Nevanlinna theory

研究代表者

山ノ井 克俊 (Yamanoi, Katsutoshi)

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：40335295

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：アーベル多様体の一般型な部分多様体は擬小林双曲的であることを証明した。これは、1920年代のブロッホの研究に始まり、1970年代の落合、川又による研究で証明された、いわゆる整正則曲線に対するブロッホ予想を、単位円板からの正則写像の族に対する、弱い意味でのコンパクト性に拡張するもので、当該分野において話題とされてきた未解決問題であった。

研究成果の概要(英文)：I proved that subvariety of general type on abelian variety is pseudo Kobayashi hyperbolic. This problem starts from Bloch's classical paper in 1920's. Subsequently Ochiai, Kawamata proved Bloch's conjecture for entire curve. After that, it was discussed by several authors whether this result can be generalized as some kind of normality of families of holomorphic maps from the unit disc. Our result answers this question.

研究分野：複素幾何学

キーワード：ネヴァンリンナ理論 擬小林双曲性

1. 研究開始当初の背景

(1) 1920年代に、プロッホは不正則数が次元より大きな射影多様体の中の整正則曲線は代数退化する、という主張を行った。これは、1890年代にピカールによって証明された、種数が2以上の射影代数曲線への複素平面からの正則写像は定数に限る、という定理の高次元化を与えるものであった。プロッホの主張は、その後1970年代に落合、川又によって証明された。

(2) また、1920年代にプロッホは、古典的なモンテルの正規族に関する研究を高次元化する結果を得た。その研究は、1920年代にネヴァンリンナによって創始されたネヴァンリンナ理論の単位円板上への拡張に立脚していた。このプロッホの結果は、1970年代に小林昭七によって、小林擬距離の言葉で幾何学的に定式化された。ちなみに、ネヴァンリンナ理論の当初の目的の一つは、一意化定理を使わないピカールの小定理の別証明を得ることにあつた。このようにネヴァンリンナ理論は、その始まりから一意化理論と深いかわりがある。

(3) 現在においても、ネヴァンリンナ理論の高次元化や、射影多様体の小林擬距離の振舞の研究などは、幅広く、奥の深い研究テーマである。特に、上で述べた事実から、自然に問題となる、不正則数が次元より大きな射影多様体の小林擬距離の振舞については、本研究開始当初は未知であつた。さらには、高次元ネヴァンリンナ理論における基本予想である、第二主要定理の確立は重要な未解決問題であり続けている。

(4) 本研究者は、本研究開始時までに、アーベル多様体に対する、第二主要定理を、打ち切り個数関数が1という、従来予想されていたよりも強い形で、証明していた。(この結果は、野口潤次郎、J. Winkelmann 両氏との共同研究により準アーベル多様体の場合に拡張することに成功した。)さらに、代数非退化な整正則曲線を含む射影多様体の基本群の任意の有限次線形表現に対して、その像は位数有限のアーベル群を含むことを証明した。この結果は、ネヴァンリンナ理論の、射影多様体の一意化理論への応用を示唆する結果である。

2. 研究の目的

(1) 以上の研究開始当初の背景を踏まえて、高次元ネヴァンリンナ理論で考察する正則写像の定義域を、従来の複素平面から単位円板に拡張し、射影多様体の小林擬距離や一意化理論の研究に応用することを研究の目的とした。

(2) また、高次元ネヴァンリンナ理論で考察する正則写像の定義域を、従来の複素平面から、その分岐被覆にまで拡張した代数型正則写像を研究することも、重要な研究目的であつた。

(3) これらの発展を、特に1. 研究開

始当初の背景(4)で述べた、本研究者のこれまでの研究成果に絡めることで、より具体的に、実行可能性の高い研究を進めることを目指した。

3. 研究の方法

(1) まずはアーベル多様体と、それよりも広いアルバネーゼ次元最大の射影多様体の場合に考察する方法をとった。その理由は、それでも十分に興味深い研究課題があることであるが、別の理由としては、射影多様体の一意化理論に登場するシャファレヴィッチ多様体は、少なくとも基本群が線形群であれば、アルバネーゼ次元最大の射影多様体と周期領域によって統制されるからである。

(2) 高次元ネヴァンリンナ理論の第二主要定理型評価式における様々な定数を、正則写像によらない定数で評価することで、正則写像に関して一様な評価式を得る、という研究方法をとった。

4. 研究成果

(1) アーベル多様体の一般型な部分多様体は擬小林双曲的であることを証明した。さらに強く、アーベル多様体の一般型な部分多様体への、単位円板からの正則写像の族は、弱い意味でのコンパクト性を持つことを証明した。これは、プロッホによる、モンテルの正規族に関する結果の、アーベル多様体版であると理解できる。この観点からは、プロッホの結果は、代数的トーラスの(対数的)一般型な部分多様体に対する結果となる。この結果により、不正則数が次元より大きな射影多様体の小林擬距離の振舞が理解される。これは、1980年代以降、当該分野の研究者によって繰り返し話題にされてきた問題であつた。尚、今回の結果の、準アーベル多様体版が出来れば、プロッホの結果を含む内容になるが、それは今後の課題である。

(2) アルバネーゼ次元最大の射影多様体への代数型正則写像に対して、第二主要定理型の評価式を、代数非退化性の仮定なしに証明した。その応用として、アルバネーゼ次元最大かつ一般型な射影多様体に対して、ラングによって定義された特殊集合が真部分代数的集合であることを証明した。また特殊集合の外にある代数曲線は、その次数が種数の定数倍で上から評価されることを証明した。これらのことは一般型射影多様体に対して成立すると予想されているが、検証されている例は少ない。

(3) 射影多様体が小林双曲的であるための必要十分条件は特殊集合が空であることである、というラングの予想を、基本群が線形群で、普遍被覆空間がシュタイン多様体であるような射影多様体に対して検証した。

(4) 高次元ネヴァンリンナ理論における重要な評価式に、幾何的対数微分の補題とよばれるものがある。従来は、古典的なネヴァンリンナの対数微分の補題とよばれる有理型

関数に対する評価式を用いる証明しか知られていなかったが、本研究で分岐被覆のテクニックを用いる直接証明を得た。これは、特にネヴァンリンナの対数微分の補題の別証明を与えるものである。

(5) 本研究期間中の2013年に、日本数学会幾何学分会より、幾何学賞を受賞した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

K. Yamanoi, Holomorphic curves in algebraic varieties of maximal albanese dimension, *Internat. J. Math.* 26 no. 6 (2015). 査読あり

K. Yamanoi, Kobayashi Hyperbolicity and Higher-dimensional Nevanlinna Theory, *Geometry and Analysis on Manifolds, Progress in Mathematics, Vol. 308*, (2015) 209-273, Springer. 査読あり

Y. Okuyama and K. Yamanoi, A generalization of a completeness lemma in minimal surface theory, *Kodai Math. J.* 37 (2014), no. 2, 506-517. 査読あり

J. Noguchi, J. Winkelmann and K. Yamanoi, Degeneracy of Holomorphic Curves into Algebraic Varieties II, *Vietnam Journal of Mathematics.* 41 no. 4 (2013), 519-525. 査読あり

K. Yamanoi, On a reversal of the second main theorem for meromorphic functions of finite order, *The proceedings of the 19th ICFIDCAA "Topics in Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis"*, (2013), 75--83. 査読あり

K. Yamanoi, Zeros of higher derivatives of meromorphic functions in the complex plane, *Proc. London Math. Soc.* 106 no. 4 (2013), 703--780. 査読あり

山ノ井克俊, 「複素多様体におけるネヴァンリンナ理論」, 最近の研究成果トピックス, 科研費 NEWS, 2013年度3号.

[学会発表](計10件)

K. Yamanoi, Pseudo Kobayashi hyperbolicity of subvarieties of general type on abelian varieties, *Hayama Symposium on Complex Analysis in Several Variables XVIII*, 湘南国際村センター, 2016年7月16日.

K. Yamanoi, On Pseudo Kobayashi hyperbolicity of subvarieties of general type on abelian varieties, *The 10-th Anniversary Tokyo-Seoul Conference in Mathematics*, 東京大学, 2015年12月4日.

山ノ井克俊, 「Bloch-Ochiai の定理と小林擬双曲性」*The 21th Symposium on Complex*

Geometry, 金沢大学サテライトプラザ, 2015年10月29日.

K. Yamanoi, 「On a degree of curves in algebraic varieties of maximal albanese dimension」, *Japan-China Geometry Conference*, 京都大学, 2015年9月7日.

K. Yamanoi, 「Nevanlinna theory for holomorphic curves into algebraic varieties of maximal albanese dimension」*Perspectives of Modern Complex Analysis*, Bedlewo, ポーランド, 2014年7月21日.

山ノ井克俊, 「有理型関数の導関数の値分布」, 2013年度幾何学賞受賞特別講演, 愛媛大学, 2013年, 9月25日.

K. Yamanoi, Holomorphic curves in algebraic varieties of maximal albanese dimension」, *多変数関数論葉山シンポジウム*, 湘南国際村センター, 2013年7月23日.

K. Yamanoi, Zeros of higher derivatives of meromorphic functions in the complex Plane, *The Asian Mathematical Conference 2013*, Busan, 韓国, 2013年7月1日.

K. Yamanoi, 「Kobayashi hyperbolicity and higher dimensional Nevanlinna theory」, *Geometry and Analysis on Manifolds: A Memorial Symposium for Professor Shoshichi Kobayashi*, 東京大学, 2013年5月22-24日.

山ノ井克俊, 「アルバナーゼ次元最大の複素射影多様体への正則曲線」, *多変数関数論冬セミナー*, 東北大学理学部・数理科学記念館, 2012年12月22日

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山ノ井克俊 (YAMANOI, Katsutoshi)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：40335295

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：

(4) 研究協力者

()