様 式 C－１９、F－１９、Z－１９ （共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ５ 月 １６ 日現在

機関番号：１３３０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４００７１

研究課題名（和文）双曲多様体の胞体分割に対する変分原理からのアプローチ

研究課題名（英文）An approach to cellular decompositions of hyperbolic manifolds based on variational principles

研究代表者
牛島　顕（Akira, Ushijima）

金沢大学・数物科学系・准教授

研究者番号：５０３２３８０３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：変分原理と呼ばれる、与えられた関数の族のなかで最適なものを一定の条件下で求めるための一つの考え方が知られている。この方法を主に用い、双曲多様体と呼ばれる幾何学的対象を適切に分割する方法を求めるのが、本研究の目的であった。
研究期間内の成果として、orthoscheme と呼ばれる四面体の体積の変化が、ユークリッド空間内の四面体の体積の変化とは異なることを示すことができた。この四面体は、双曲多様体の分割にも用いられる。この結果は、変分原理の一種である Schlaefli の公式を活用して得られたものである。この結果を研究論文として発表するとともに、国内外の研究集会で発表した。

研究成果の概要（英文）：A variational principle is a principle that is used to obtain a “best” solution of a given family of functions. The purpose of this research project was set to obtain a sufficient decomposition of a hyperbolic manifold, which is a subject of geometry, using a variational principle.
During this research project, I published a research article about a behavior of the volumes of orthoschemes, that is used to decompose hyperbolic manifolds and is a generalization of pyramids in the Euclidean space. Its main result explains the difference of the behavior of the volume from the Euclidean one, when the “height” of the orthoscheme varies. This research was obtained from the Schlaefli formula, a variation of the variational principle with respect to the hyperbolic volume form. Not only publishing the result, it was also presented in domestic and international conferences for mathematics.

研究分野：数学

キーワード：幾何学　双曲幾何学

１．研究開始当初の背景

双曲多様体を幾つかの多面体に分割する方法として標準的分割（*canonical decomposition*）と呼ばれるものがある。これは、カスプのある場合に Epstein と Penner により 1988 年に構成されたのを端緒とし、境界のある場合や点が指定されている閉多様体等に対しても適用出来る様に、多くの研究者により拡張された。

しかし、閉多様体に対しては、標準的分割に当たるものは申請時点では確立されていなかった。多様体にカスプや境界があれば、それらを起点として分割面を構成するのが標準的分割の構成法である。しかし、一般の閉多様体の場合には、起点の自然な取り方が存在しない。これが、閉多様体の標準的分割の確立を困難にしている理由である。

標準的分割は、双曲多様体を調べる際の非常に強力な道具になる。補空間の胞体分割を用いた双曲結び目の分類や特徴付け、カスプのある曲面上の双曲構造全体が成すタイヒミュラー空間の胞体分割、またその様な曲面上のモジュライ空間の体積の計算等が、標準的分割を用いた研究成果の重要な例である。閉多様体に対する標準的分割を確立する事により、これらに相当する結果が閉多様体に対しても得られる事が期待された。更に、標準的分割がどんな双曲多様体に対しても定義されれば、標準的分割という手法から見た双曲多様体全体の様子が詳らかになり、その結果この分野の研究に大きな進展をもたらす事が期待された。

閉多様体の標準的分割を構成する事を目指し、本科研費の研究代表者はこれまで研究を進めてきた。その方針は、閉曲面の標準的分割の構成法として Näätänen と Penner が 1991 年に述べた次の予想に基づいている：「双曲曲面上の点を、対応する基本多角形(即ち基本群の作用に関する基本領域）の位相型により分類する事で、その曲面の胞体分割が得られるだろう」。

本研究課題以前の研究（若手(B)、2007--2008 年度及び 2009--2010 年度）では、三次元及び二次元の場合に、最大次元の胞体となる事が期待される、基本多角形の組み合わせ構造に対し「安定」と呼ばれる性質がある点の集合の次元が、確かに最大になることを示した。しかしながら、この様に、各次元の胞体分割の可能性を個々に調べているのが現状であり、一般的な場合の胞体分割の研究が充分に進んではいなかった。

これらの問題を解決するヒントとなる研究結果として、Armando Jose Rodado Amaris による博士論文 “Weierstrass Points and Canonical Cell Decompositions of the Moduli and Teichmüller Spaces of Riemann Surfaces of Genus Two” に注目した。種数が 2 の閉双曲曲面には「ワイエルシュトラス点」と呼ばれる点が自然に定まる。これらを起点にすると、標準的分割が定まる。双曲構造毎に定まる分割の位相型を用いると、タイヒミュラー空間やモジュライ空間の胞体分割を構成出来る事を述べたのが、この論文の要旨である。

閉双曲多様体の標準的分割理論の構築において、この結果は非常に重要である。カスプのある曲面上のタイヒミュラー空間の胞体分割を構成する為の道具として Epstein と Penner による標準的分割が作られた歴史的経緯を踏まえると、この論文で得られたことは、タイヒミュラー空間の胞体分割を先に構成したと言える。

Amaris の論文では、主結果を得る過程で変分原理（*variational principle*）は重要な役割を果たしている。胞体同士の境目の様子に関する研究において、計算機による数値計算が用いられている。この数値計算における解の存在は、曲面上の円充填の問題の解の存在定理から保証されている。更に、円充填の問題は、曲面上のエネルギー関数を適切に用意し、その関数の特徴を変分原理を用いて翻案する事で解決されている。

変分原理を用いた、双曲多様体およびタイヒミュラー空間の研究は、近年活発になってきている分野である。定曲率空間内の単体の、辺角・辺長・体積の関係を微分方程式で表した Schläfli の公式が古くから知られていたが、これはエネルギー関数の変分原理に関する典型的な例である。Colin de Verdiere によって 1991 年に新しいエネルギー関数が発見され、その変分原理を用いて円充填に関する別証明が得られてから、この分野は急速に発展している。エネルギー関数を網羅的に探し出した Feng Luo の結果が 2006 年に得られ、研究が益々活発になっていた。

２．研究の目的

本研究課題の当初の目的は二つあった。

一つ目は、種数が 2 の閉曲面上の胞体分割を得ることである。これは、Näätänen と Penner による先の予想に従って Amaris の論文を見直す事により得られるであろうと予想したことの基づく。その目的を達成するためには、Amaris の論文において数値計算に依存している証明の部分に別証明を与える必要がある。ここで用いられているエネル

ギー関数及びその変分原理に関し、タイヒミュラー空間の座標との関係を詳細に検討する事で、数値計算によらずに証明を与える事が出来るのではないかと研究代表者は予想をした。

二つ目は、第一の研究目標に対する考察を活かし、他のエネルギー関数に対する変分原理の具体的な様子を調査することであった。一般の種数の閉曲面に対し同様の結果を構成するには、タイヒミュラー空間上の適切なエネルギー関数を構成する事が重要になる。既知のエネルギー関数とタイヒミュラー空間の座標付けとの関係は既に Luo が着手をしているものの、考えるべき問題は依然として多く残っている。例えば、変分原理によりエネルギー関数の停留点の存在が証明されたとして、その具体的な点の位置をどう求めるかは、充分に検討されているとは言えない。Amaris の論文における数値計算による証明の箇所も、この問題に関係している。これらの問題を考えることを、第二の目的とした。

３．研究の方法

上記の研究の目的を達成するために、専門家との議論のほか、国際研究集会への参加を計画した。特に、本研究期間内には四年に一度開かれる国際数学者会議が開催されるため、この機会に多くの専門家との議論を交わすことを計画した。実際、上記の研究目的で繰り返し言及した Feng Luo 教授と議論をする機会を得ることができ、また国際研究集会で研究成果を発表することもできた。

４．研究成果

研究成果を、年度毎に説明する。

平成 24 年度の本研究では、変分原理に関する Feng Luo を中心とする先行研究の検討と、それと併せて大域的構造に関する専門家との議論を主に行った。

変分原理に関する先行研究の検討では、Feng Luo, Xiangeng Devid Gu, Junfei Dai による著書“Variational Princi ples for Discrete Surfaces”及び彼らの出版論文を基にして変分原理の既存の研究結果についての理解を深め、その成果は低次元位相幾何学の専門家に向けて約二時間弱の口頭発表に纏め、専門家からのコメントを得た。

また、大域的構造に関する研究では、曲面の多角形分割の構造全体を理解するために、それらが作る圏の構造を中心に研究を行った。その過程で、曲面の局所的な振る舞いが全体構造にどの程度影響するのかを理解する方法として computer graphics で培われた既存の手法が活用出来る可能性に気付き、その知識の習得の為に必要な computer software を購入し、その使い方に関して専門家である Studio Phones の桐生裕介氏から知識の提供を受けた。

平成 25 年度研究成果は三つあり、Feng Luo 教授と議論をする機会を得たこと、大域的構造に関する専門家との議論を行ったこと、更に、三次元双曲多面体の一種である orthoscheme の体積に関し変分原理と関係の深い Schläfli formula を用いた研究を行ったこと、である。

Feng Luo 教授との議論は、京都大学数理解析研究所で行われた研究集会に参加するために来日された機会を捉えて行った。同研究所での講演の基となった論文の内容に関する議論を行って理解を深め、それを踏まえて同論文の研究内容を整理し、国内の専門家に対して講演を 12 月に行い、内容の理解を深めた。

大域的構造に関する研究では、昨年度に引き続き、曲面の多角形分割の構造全体を理解するために、それらが作る圏の構造を中心に研究を行った。平成 25 年度の研究では、曲面の多角形分割の構造を表す圏の候補を構成することができた。

Schläfli formula に関する研究では、ユークリッド四面体と同様に、底面を固定して高さを変化させた際の、orthoscheme の体積の変化に関する研究を、日本大学の市原一裕教授との共同研究として行った。その結果、ユークリッド四面体の状況とは異なる、双曲空間に特徴的な興味深い現象を観察する事ができた。この研究成果は論文として公表する事ができ、また学会でも発表した。

平成 26 年度の研究成果は三つあり、前年度に引き続き、変分原理を用いた研究の第一人者である Feng Luo 教授と議論を深めることができたこと、この議論に影響を受け、computer graphics に関する研究を進めたこと、orthoscheme の体積に関する研究を国際研究集会においても発表し、参加者と議論を深められたことの三点である。

Feng Luo 教授との議論は、本科研費助成金により国際研究集会“A Satellite Conference of Seoul ICM2014/ Knots and Low Dimensional Manifolds”に参加した際に行

った。変分原理に関する未解決問題の議論のほか、双曲四面体の体積に関する未解決問題なども議論をすることができた。

Feng Luo 教授の著書にもある様に、変分原理や三角形分割は、computer graphics とも関係が深い。研究初年度から引き続く Studio Phones の桐生裕介氏との様々な議論の一環として、この分野に関しても本科研費助成金による研究打ち合わせの際に議論を行った。

orthoscheme の体積公式に関し前年度に得られた知見を、本科研費助成金により参加した国際研究集会"The 7th MSJ-SI Hyperbolic Geometry and Geometric Group Theory"で発表する機会を得た。この発表において、参加者から様々なコメントを得ることができた。それに基づき、共著者である市原一裕教授と、この研究テーマを更に深めていくための方針について議論をした。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

① Kazuhiro Ichihara and Akira Ushijima, "On the maximal volume of three-dimensional hyperbolic complete orthoschemes", Proceedings of the Institute of Natural Science, Nihon University, 査読有, Volume 49 (2014) 169-174.

〔学会発表〕（計２件）

① Kazuhiro Ichihara and Akira Ushijima, "On the maximal volume of three-dimensional hyperbolic complete orthoschemes", The 7th MSJ-SI Hyperbolic Geometry and Geometric Group Theory, 平成 26 年 7 月 31 日から 8 月 4 日まで、東京大学駒場キャンパス（東京都渋谷区）

② 市原一裕, 牛島顕, 「底面が共通な三次元双曲 complete orthoscheme の最大体積について」、日本数学会 2014 年度年会、平成 25 年 3 月 17 日、学習院大学目白キャンパス(東京都豊島区)

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕

該当項目無し

６．研究組織

(1)研究代表者

牛島 顕(USHIJIMA, Akira)

金沢大学・理工研究域数物科学系・准教授

研究者番号：50323803

(2)研究分担者

該当者無し

(3)連携研究者

該当者無し