1版

様　式　C−１９、F−１９、Z−１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 ２１ 日現在

機関番号：１３８０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2015
課題番号：２４５４００７３
研究課題名（和文）部分多様体とラプラス作用素の幾何学

研究課題名（英文）Riemannian submanifolds and geometry of Laplace operator

研究代表者
久村　裕憲（Kumura, Hironori）

静岡大学・理学部・准教授

研究者番号：３０２８３３３６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　4,000,000円

研究成果の概要（和文）：リーマン部分多様体は、ターゲットとなる多様体の幾何に比べ、その曲率と第２基本形式が小さければターゲットの領域を脱出しなければならない。このことに関し、先の論文ではターゲットをねじれ積とし、その領域としてはシリンダー状のものを考えた。今回はターゲットをリーマン沈め込みとし、そこからの脱出スピードを幾何学的量を用いてexplicitely に計算値を与えた。また、ラプラシアンの固有値が正のときの等長可能性を論じた。

研究成果の概要（英文）：Riemannian submanifolds M may exit from a domain of target manifold, if the norm of the curvature of M and the second fundamental form are sufficiently small compared to the target manifolds. In this respect, I considered the case the target manifolds are Riemannian submersion and extended the results of previous paper. I calculate exit radii from cylinderorical domain using the geometric quantity explicitly. I also consider the relationship possibility of immersion and the eigenvalue of the Laplacian.

研究分野：幾何学

キーワード：部分多様体　ラプラス作用素

１．研究開始当初の背景

Nash の定理により、すべてのリーマン多様体は十分高い次元のユークリッド空間に等長的に挿入することが出来る。しかし、（ターゲット多様体の次元から定義域多様体の次元を引いた数）余次元が小さいときには、等長挿入の‘余裕’がなくなり、様々な等長挿入のための障害が出現するだろう。それは

・トポロジカルなもの（代数的位相幾何学における（コ）ホモロジー・基本群など）

・定義域の多様体の曲率や位相的性質等、内在的な性質のもの

・（体積汎関数のグラディンとの符号を変えたものである）平均曲率ベクトルや像の大きさなどを制限する外的な性質

などである。例えば、次は Tompkins （[1]）による古典的な結果である： n 次元のコンパクト平坦なリーマン多様体は 2n-1 次元のユークリッド空間内に等長挿入することは出来ない。この定理では、コンパクト平坦というのが内在的性質、ターゲットがユークリッド空間であるというのが外在的性質である。また、コンパクト集合の（連続）像として像は有界になる。例えば、非常に簡単な例として、平坦な（曲がりのない）トーラス（浮き輪の表面）は３次元ユークリッド空間に等長挿入できない。この Tompkins の定理はその後 Chern – Kuiper（[2]）により次のように一般化された：M を n+p 次元のユークリッド空間に等長挿入された n 次元のコンパクト・リーマン多様体とする。もし M の各点の接空間が m 次元の部分（ベクトル）空間を持ち、そこでは断面曲率が非正であるならば、余次元 p は m 以上でなければならない。この系として、Tompkins の定理の仮定の「平坦」という部分は「断面曲率非正」に変えても正しいことが分かる。この定理の余次元 は Otsuki による対称２次形式に関する代数的補題（[3]）によるものであった。Tompkins や Chern – Kuiper の論文以降、等長挿入の可能性の問題は様々な形で研究され続けてきた。その研究において、ノンコンパクト完備なリーマン多様体の等長挿入を問題にする場合は、いわゆる大森の補題を用いるものが多かった。例えばもう少し最近のものとして Jorge, Xavier, Koutroufiotis, and Omori らの結果を拡張した加須栄 による次の定理がある：定義域のリーマン多様体 M のスカラー曲率が［ 距離関数×（距離関数の対数関数）］の２乗の負定数倍以上であり、M 像が、k 以下の放射曲率を持ちかつ単射半径が i 以上の正規測地球内にあるならば平均曲率ベクトルの長さの最大値は k と i から tan や cotan を用いて計算されるある関数以上であるというものである（具体的な関数は([7] の定理 H を見られたい）。荒く言えば、曲率が上から押さえられた正規測地球内にリーマン多様体が等長挿入された場合、平均曲率の最大値は一定以上でなければならないということである。Jorge – Koutroufiotis（[6]）はこの定理の証明において、大森の補題（[4] p. 715）を効果的に使っていた。ところが、加須栄氏の方法（[7]）は他の証明とは全く異なっていたばかりでなく、定義域の多様体の曲率の下限を距離関数の２乗の負の定数倍にまで一気に拡張するものであった。加須栄氏は大森の補題を用いるのではなく等長挿入される定義域の多様体上でポワソン方程式を考え、その解の下限をリッチ曲率の下限を用いて表した。また、一方、解の supersolution をターゲットの幾何と平均曲率で表し、この不等式から結果を導き出した。その結果定義域のリーマン多様体のリッチ曲率の下限は上述のように大幅に一般化されることとなった。この加須栄氏による観点から見ると、等長挿入の問題はグリーン関数を通して定義域のリーマン多様体のポテンシャル論的性質・確率的な性質が関与していることが分かる。

極小挿入の場合は、定義域の多様体とターゲットの多様体の熱核の比較評価が出来て、Chen-Li-Yau（[8]）は次の結果を示した：定曲率空間型に極小挿入されたリーマン部分多様体 M を考えるとき、M の熱核は定曲率空間型の熱核以下である。これから時間に関し積分することによりグリーン核の比較定理が得られる。これは極小部分多様体に固有の性質であって、例えば、平均曲率一定の部分多様体には当てはまらない。

Zhou は（[9]）においてラプラシアンの固有値と等長可能性を研究した。 M の測地球の第１固有値がターゲットの多様体の正規測地球の半径、放射曲率、M の次元から計算される値より小さければ、M の測地球はターゲットの測地球を飛び出さねばならないという結果を得た。

また、Alias, Bessa, Montenegro and Piccione は、ねじれ積多様体であるターゲット多様体の中にあるシリンダー領域への等長可能性を論じたが、私は当研究の直前に、平均曲率ベクトルの長さが幾何量から計算可能な値に比べて大きいとき、等長挿入されたリーマン多様体はシリンダー領域を脱出しなければならず、さらに、その脱出スピードを具体的に計算した。また、ラプラシアンの固有値を使って述べた、上述の Zhou の結果をこのシリンダー領域内へ等長挿入について一般化した。

引用文献

1. C. Tompkins, "Isometric embedding of flat manifolds in euclidean space," Duke Math. J. 5 (1939), pp. 58-61.
2. Chern and Kuiper, Some theorems on the isometric imbedding of compact

Riemann manifolds in euclidean space. Ann. of Math. (2)　56, (1952). 422–430.
3. Otsuki, On the existence of solutions of a system of quadratic equations and its geometrical application. Proc. Japan Acad. 29, (1953). 99–100.
4. H. Omori, Isometric immersions of Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan 19 (1967), pp. 205-214.
5. L. Jorge and F. Xavier, An inequality between the exterior diameter and the mean curvature of bounded immersion. Math. Z. 178 (1981), 77–82.
6. Jorge and Koutroufiotis, An estimate for the curvature of bounded submanifolds. Amer. J. Math. 103 (1981), no. 4, 711–725.
7. A. Kasue, Estimates for solutions of Poisson equations and their application to submanifolds. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1090, pp. 1–14 (Springer, 1984).
8. Cheng, Li, and Yau, Heat equations on minimal submanifolds and their applications. Amer. J. Math. 106 (1984), no. 5, 1033–1065.
9. D. Zhou, Laplace inequalities with geometric applications. Arch. Math. 67 (1996), 50–58.

２．研究の目的

金魚すくいで使った針金を自由に曲げ、それを石鹸水につける。そのとき石鹸膜ができるが、膜は表面張力により小さい部分に限れば面積最小となるものである。このような膜を極小曲面と言い、その解は極小曲面方程式([1])**と呼ばれる２階の偏微分方程式**(minimal surface equation)**を満たす。この極小曲面解（石鹸膜）の存在・一意性・境界での正則性の問題が提起され、**Douglas**、**Rado**、**Courant **などを初めとして、非常に多くの研究者がこの問題に取り組んできた。現在でも、定義域とターゲットのリーマン多様体を一般なものとし、極小曲面は活発に研究され続けている。ここでは **3 **次元ユークリッド空間内の曲面を考えているが、問題を一般化し、曲面を次元を問わないリーマン多様体に、また、**3 **次元ユークリッド空間を一般次元のリーマン多様体にし、部分多様体の問題を考えるのは重要である。これはホモロジー代数で学んだように、群の性質を、群そのものではなく、準同型写像を通して眺めてその性質を明らかにしようとする観点と相通じるだろう（加群の入射性、射影性、平坦性などの概念などが当てはまる）。また、トポロジーでも連続写像が定義する（コ）ホモロジーの準同型というものが考察されていたのであった。このように幾何学において部分多様体というのは人間が生まれたときからシャボン玉に接するように非常に基本的な問題である。それを考えようというのである。**

引用文献

1. Osserman, a survey of minimal surfaces, 1964, pp. 17

３．研究の方法

幾何において解析学の重要性は Yau **による** Calabi **予想の解決を契機として、とくに** 1970 **年代後半以降活発になって来たように思う。**Kac Can one hear the shape of the drum? **と題するノートに象徴されるスペクトル幾何学と呼ばれる分野も一時盛んに研究された。この研究の目的は、ラプラシアンの持つ解析的な性質を使って部分多様体の幾何を考察するということである。もう少し具体的に言うと、リーマン多様体の間の等長挿入の可能性をポワソン方程式、グリーン核、熱核、固有値などを使って考察することである。**

（さらに言えば、等長挿入の可能性という幾何的な問題を、解析という道具使って解きたいのである）。

４．研究成果

私は前著 Exit radii of submanifolds from cylindrical domains in warped product manifolds, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 145A, 559–569, 2015 **の結果を、ターゲットが一般のリーマン沈め込みある場合に拡張した。これは O’Neill, The fundamental equations of a submersion. Michigan Math. J. 13, 459-469 (1966) の２つの基本テンソル T, A の評価を使って容易に得た。**

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　０件）

〔学会発表〕（計　０件）

〔図書〕（計　０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
久村　裕憲（Hironori Kumura）
静岡大学・理学部・准教授
研究者番号：30283336

(2)研究分担者
(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　　)

研究者番号：