

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 5 日現在

機関番号：13903

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24540075

研究課題名(和文) アダマール多様体の理想境界とケーラー磁場

研究課題名(英文) Ideal boundary of a Hadamard manifold and Kaehler magnetic fields

研究代表者

足立 俊明 (ADACHI, Toshiaki)

名古屋工業大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：60191855

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：まず1つの軌道に対してその始点と軌道上の各点を測地線で結んで構成される軌道ハープについて、構成された測地線分の長さやそれらの初期ベクトルが作る天頂角を考え、ケーラー多様体の断面曲率が上から評価されているという条件の下で長さや天頂角の下からの評価を与えた。次に、磁力がアダマール・ケーラー多様体の曲率に比べて小さいとき、軌道の非有界性と、磁性指数写像の微分同相性を示した。更に、1つの測地線に対してその始点と各点を結ぶ軌道で構成される軌道ホルンを考え、磁力と断面曲率との関係を満たせば多様体上の点と理想境界上の点とを結ぶ軌道がただ1本存在し、理想境界の異なる2点を結ぶ軌道が存在することを示した。

研究成果の概要(英文)：A trajectory-harp consists of a trajectory and a variation of geodesics. We first studied string-lengths, lengths of geodesic segments, and zenith angles which are formed by initial vectors of geodesics. Under the condition that sectional curvatures of the underlying manifold are bounded from above, we gave estimates of these quantities from below. We next studied trajectories on a Hadamard Kaehler manifold by using these estimates. When the square of the strength of a Kaehler magnetic field is smaller than the upper bound of sectional curvatures, we found that every its trajectory is unbounded and that every magnetic exponential map is a diffeomorphism. Moreover, studying trajectory-horns which consist of geodesics and variations of trajectories, we showed that for given a point on a manifold and a point in its ideal boundary there exist a unique trajectory joining them, and that for given distinct points in the ideal boundary there is a trajectory joining them.

研究分野：幾何学

キーワード：Kaehler magnetic fields Hadamard manifolds trajectory-harps ideal boundaries

1. 研究開始当初の背景

非正曲率多様体の考察手法の1つとして、普遍被覆空間であるアダマール多様体を考えて、その上の測地直線の量を調べたり測地半線の漸近挙動により理想境界を定めその幾何学から内部の幾何学を考察するという方法がある。この方面での研究は Eberlein-O' Nell が理想境界の定義を与えて以来多くの研究者が活発な研究を行ってきて Schroeder による多様体のユークリッド成分の決定など剛性定理が示されて1つの完結を見た。しかしその後も CAT(k)空間への拡張や調和関数の挙動との関連性などの考察も行われている。

2. 研究の目的

測地線族の研究では非正曲率多様体の中で特に平坦性との関連が考察された。測地線が測地曲率 0 であることと断面曲率が 0 (平坦) であることが関連しているのではないかという観点に基づいて、本研究では、負曲率ケーラー多様体の断面曲率がどの程度負であるかということが曲線族の性質に反映されているはずである、という立場に立って、ケーラー多様体の複素構造に関連する曲線族であるケーラー磁場の軌道やケーラー多様体の実超曲面上の佐々木磁場の軌道を考えて、磁力と断面曲率との関係で軌道の性質がどのように変化するかを考察し、逆にこのような軌道の性質から断面曲率などの多様体の様子を調べることを目的とした。

3. 研究の方法

研究を遂行するにあたり大きく3つの方向に分けて考察を行った。

(1) アダマール・ケーラー多様体上の軌道の漸近挙動の考察

多様体の断面曲率が上から評価されているときに、磁力がその評価値に比べて小さい場合に軌道が発散しているか、また発散するとき漸近的に理想境界のある点に収束するか、という問題を、軌道に対して軌道の始点と他の各点とを測地線で結んでできる軌道ハープや測地線の始点と他の点とを結ぶ軌道族で得られる軌道ホルンの様子を複素空間形上の軌道ハープや軌道ホルンと比較することで調べた。

(2) 複素空間形内の実超曲面族の中で等質なものの佐々木磁場の軌道による考察

測地球面など等質な部分多様体上の佐々木磁場による軌道を複素空間形の曲線と見たときにどのような曲線に見えるか。特に円に見える軌道はどの程度あるかを考察した。

(3) 負曲率ケーラー多様体の離散化の試み

頂点と辺の集合からなるグラフは負曲率リーマン多様体の離散モデルと考えられていて、グラフ上の連続する辺である道が測地線に対応する。本研究では幾何学構造を持つリーマン多様体において構造に関連する曲

線族を取り、その性質を調べ更に多様体の様子を考察することを行っている。従ってこの考えに沿った離散化の存在が期待される。ここでの考察では、幾何構造の離散化を直接行わずに幾何構造に付随する曲線族をグラフ上で考察するにはどうしたらよいかという観点に立って、2種類の辺を持つグラフを考察することを提案した。

4. 研究成果

(1) 軌道ハープをトポノゴフの比較定理における測地三角形の対応物と考えて、断面曲率が上から評価されているという条件の下で複素空間形の軌道ハープとの比較を行った。軌道ハープの長さを表現する量として、軌道の始点と軌道上の各点とを結ぶ測地線分(弦)の長さを考える。この長さ関数の導関数が弦と軌道とがなす角となることに注目して、弦が測地線の変分を成すことからラウチの比較定理を適用することで、角と長さを下から評価した。次に軌道ハープの太さを表現する量として、弦の初期ベクトルが作る単位接空間内の曲線の長さ(天頂角)と指定した長さの弦弧が作る扇形の弧の長さを考え、これらの下からの評価を与えた。簡単に述べると、断面曲率が大きい多様体上の軌道ハープは断面曲率が小さい多様体上の軌道ハープと比較して太く短いことがわかった。

アダマール・ケーラー多様体上で軌道ハープの長さに関する比較定理を適用すると、断面曲率が上から $c (<0)$ で評価されていれば、磁力 k が $k^2 \leq |c|$ を満たすとき軌道は非有界であり、更に磁性指数写像を考えるとき接空間から多様体への微分同型写像になっていることを示した。また、天頂角に関する比較定理を適用することで、この条件の下で軌道は無限遠点のある点に収束することがわかった。

軌道の性質を更に調べるために軌道ホルンを導入し、各軌道線分の長さや軌道の初期ベクトルが成す単位接空間内の曲線の長さ(吹き角)を考察した。軌道ハープの場合と異なり長さ関数の導関数が単純ではないことから直接複素空間形の軌道ホルンと比較することはできないが、アダマール多様体においては磁性指数写像が全単射であることから軌道ホルンの各軌道(管)に対して軌道ハープを構成することが可能であるため、軌道ハープの比較定理を通して、断面曲率が上から負の定数 c で評価されている場合に管の長さや吹き角の上からの評価を与えることができた。この比較定理を適用することで磁力 k が $k^2 < |c|$ を満たすとき、多様体の点と理想境界の点を任意に与えたときに両者を結ぶ軌道がただ1本存在することがわかった。更に異なる理想境界上の2点を結ぶ軌道も存在することが示された。

また軌道ハープの比較定理の応用として、ある点を始点とする長さ r の軌道線分が作る軌道球の体積の評価を行い、ビショップの

定理に対応する結果を得た。

(2) ケーラー多様体の構造に付随する曲線族としてケーラー磁場の軌道を選んで考察しているが、古典的な幾何学において測地線に次ぐ性質を持っているのは、フレネ・セレーの公式を考えると測地曲率を1つだけ持つ円ということになる。しかし、過去の研究において、ケーラー磁場の軌道は円の1種であり測地線の摂動という形で得られるが、これらの軌道は他の円と非常に性格が異なることがわかってきた。ケーラー多様体において円が持つ幾何学的な背景を、複素空間形という良いケーラー多様体で調べてみた。

実超曲面上には複素空間形の複素構造から誘導される接触構造があり、この構造が定める佐々木磁場が存在する。この佐々木磁場の軌道を複素空間形内の曲線とみるとどのようになるかを調べた。複素空間形には、測地球面を含むA型とよばれる対称性の高い等質実超曲面が部分多様体として含まれている。この超曲面上の佐々木磁場による軌道が複素空間形で円に見える(外的形状)ための条件をまず考察し、ケーラー磁場の軌道以外の円はそれぞれあるA型等質実超曲面上の適当な佐々木磁場による軌道の外的形状になっていることがわかった。更に、ある磁力を指定して外的形状が円に見える佐々木磁場の軌道の初期ベクトルが単位接空間を生成するという条件でA型実超曲面を他の実超曲面の中で特徴付けることに成功した。この考察を細かく見ると、指定する磁力と複素空間形の正則断面曲率の関係で測地球面、ホロ球面、複素超曲面を中心とする管のどれになるかを分類することまでできた。

(3) 主辺と補助辺の2種類を持つケーラーグラフにおいて、主辺の道を測地線と考え補助辺を使うことでまっすぐなものが曲げられたと考えることにした。すなわちP-ステップの主辺による道に引き続いてq-ステップの補助辺の道を考え、これを測地曲率 q/p で長さ p の道と考えることにした。曲がる方向は補助辺の選び方の分あるので、そのどれか1つになると考え確率的に処理を行った。

これらの概念構成の元に今回はまずグラフ理論で成立することの拡張を考えることにした。まずケーラーグラフが豊富にあることを示すために直積型ケーラーグラフの構成方法を与えた。次に多様体のラプラシアンに相当するグラフ・ラプラシアンがあるが、ケーラーグラフについてもグラフ・ラプラシアンを考えて、同じ固有値を持つ同型ではないケーラーグラフの存在を示した。また各頂点からでる主辺の数補助辺の数が一定である正則ケーラーグラフの場合に (p, q) -グラフ・ラプラシアンの固有値と主辺によるグラフ・補助辺によるグラフのラプラシアンの固有値との関係を考察した。

また、今後ケーラーグラフ自身の考察を進める上でも、多様体との関連を考察するのに

も重要な対称性の高いケーラーグラフとは何かを明確にするために、ケーラー磁場による軌道が定める球面平均作用素との関係を作用素の双対性という観点から考察した。複素空間形では、磁力 k の球面平均作用素の双対は磁力 $-k$ の球面平均作用素になっていることから、ケーラーグラフの場合、頂点推移的であり主辺により隣接作用素と補助辺による隣接作用素とが可換になっているという条件が重要だという結論に到った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件)

- ① ADACHI, Toshiaki,
A theorem of Hadamard-Cartan type for Kaehler magnetic fields, Journal of Mathematical Society of Japan, 査読有、Vol. 64, No. 3, 2012, 969 – 984、DOI : 10.2969/jmsj/06430969
- ② MAEDA, Sadahiro, ADACHI, Toshiaki, KIM, Young-Ho,
Characterizations of geodesic hyperspheres in a nonflat complex space form, Glasgow Mathematical Journal, 査読有、Vol. 55, No. 1, 2013, 217 – 227、DOI : 10.1017/S0017089512000456
- ③ ADACHI, Toshiaki, BAI, Pengfei,
An estimate of the spread of trajectories for Kaehler magnetic fields, Hokkaido Mathathematical Journal, 査読有、Vol. 42, No. 3, 2013, 445 – 462、
- ④ ADACHI, Toshiaki,
Dynamical systematic aspect on horocyclic circles in a complex hyperbolic space, Prospects of Differential Geometry and its Related Fields, 査読有、2013, 99 – 114
- ⑤ ADACHI, Toshiaki,
Extrinsic circular trajectories on geodesic spheres in a complex projective space, Differential Geometry of Submanifolds and its Related Topics, 査読有、2013, 44 – 59
- ⑥ ADACHI, Toshiaki, BAO, Tuya, MAEDA, Sadahiro,
Congruence classes of minimal ruled real hypersurfaces in a complex space form, Hokkaido Journal of Mathematics, 査読有、Vol. 43, No. 1, 2014, 137 – 150
- ⑦ ADACHI, Toshiaki, BAI, Pengfei,
Volumes of trajectory-balls for Kaehler magnetic fields, Journal of Geometry, 査読有、Vol. 105, No. 2, 2014, 369 – 389
DOI : 10.1007/S00022-014-0226-2

- ⑧ ADACHI, Toshiaki,
A comparison theorem on harp-sectors
for Kaehler magnetic fields, Southeast
Asian Bulletin of Mathematics, 査読有、
Vol. 38, No. 5, 2014, 619 – 626
- ⑨ ADACHI, Toshiaki,
Foliation on the moduli space of
extrinsic circular trajectories on a
complex hyperbolic space, Topology and
its Applications, 査読有、Vol. 196, 2015,
311 – 324
DOI : 10.1016/j.topol.2015.05.008
- ⑩ TUERXUNMAIMAITI, Yaermaimaiti,
ADACHI, Toshiaki,
Isospectral Kaehler graphs, Kodai
Mathematical Journal, 査読有、Vol. 38,
No. 3, 2015, 560 – 580
- ⑪ TUERXUNMAIMAITI, Yaermaimaiti,
ADACHI, Toshiaki,
Kaehler graphs of connected product
type, Applied Mathematics &
Information Sciences, 査読有、Vol. 9,
No. 6, 2015, 2767 – 2773
- ⑫ ADACHI, Toshiaki,
Laplacians for finite regular Kaehler
graphs and for their dual graphs,
Current Developments in Differential
Geometry and its Related Fields, 査読
有、2015, 23 – 44
- ⑬ TUERXUNMAIMAITI, Yaermaimaiti,
ADACHI, Toshiaki,
Laplacians for derived graphs of
regular Kaehler graphs, Comptes
Rendus Mathematiques de l'Academie
des Sciences La Societe royale du
Canada, 査読有、Vol. 37, No. 3, 2015,
141 – 156
- ⑭ SHI, Qingsong, ADACHI, Toshiaki,
An estimate on volumes of
trajectory-balls for Kaehler magnetic
fields, Proceedings of Japan Academy
of Sciences, Vol. 92, Ser. A, No. 4, 2016,
47 – 50

[学会発表] (計 18 件)

- ① 足立俊明,
複素空間形内のホップ超曲面上の佐々木
磁場による軌道、国際研究集会「部分多
様体の微分幾何学および関連分野」2012
年 8 月 5 日、佐賀大学工学系研究科
- ② 足立俊明,
Trajectories for Sasakian magnetic
fields and circles on a nonflat complex
space form, 3rd International
Colloquium on Differential Geometry
and its Related Fields, 2012 年 9 月 4
日、Veliko Tarnovo, Bulgaria
- ③ 前田定廣・足立俊明・包図雅,
非平坦複素空間形内の極小線織実超曲面
の合同類、日本数学会2012年度秋期総合

分科会、2012年9月18日、九州大学伊都キ
ャンパス

- ④ 白鵬飛・足立俊明,
ケーラー磁場による軌道球の体積、日本
数学会2012年度秋期総合分科会、2012年9
月20日、九州大学伊都キャンパス
- ⑤ 白鵬飛・足立俊明, 軌道球面の面積、
日本数学会2013年度年会、2013年3月22日、
京都大学吉田キャンパス
- ⑥ 足立俊明,
Foliation on the moduli space of
extrinsic circular trajectories on a
complex hyperbolic space, International
Conference on Topology and Geometry
2013, 2013年9月4日、島根大学総合理工
学部
- ⑦ 足立俊明,
Trajectories for Kaehler magnetic fields
on a Hadamard manifold, The Diliman
Mathematical Research Workshop 2013,
2013 年 10 月 15 日、University of
Philippines, Diliman, Manila, Philippines
- ⑧ 足立俊明,
Kaehler graphs --- Discrete models of
manifolds equipped with magnetic
fields ---, 4th International Colloquium
on Differential Geometry and its
Related Fields, 2014年9月12日、Veliko
Tarnovo, Bulgaria
- ⑨ ヤリママト トルソンママト・足立俊明,
ケーラーグラフ、日本数学会2014年度秋
季総合分科会、2014年9月25日、広島大学
- ⑩ ヤリママト トルソンママト・足立俊明,
ケーラーグラフの $(1, 1)$ -ラプラシアン、
日本数学会2014年度秋季総合分科会、
2014年9月25日、広島大学
- ⑪ 足立俊明,
An estimate on volumes of
trajectory-balls for Kaehler magnetic
fields, Interenational Conference on
Recent Advances in Pure and Applied
Mathematics 2014, 2014 年 11 月 7 日、
Club Hotel Sela, Antalya, Turkey
- ⑫ ヤリママト トルソンママト・足立俊明,
正則ケーラーグラフの (p, q) -ラプラ
シアン、日本数学会2015年度年会、2015
年3月21日、明治大学
- ⑬ 前田定廣・足立俊明,
非平坦複素空間形内の線織実超曲面に関
する注意、日本数学会2015年度年会、2015
年3月23日、明治大学
- ⑭ 足立俊明,
Extrinsic circular trajectories on real
hypersurfaces of type (A) in a complex
hyperbolic space, 1st International
Conference on Differential Geometry,
2016 年 4 月 12 日、Fez, Morocco
- ⑮ 足立俊明,
Trajectory-harps and horns for Kaehler
magnetic field, 5th International

Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields, 2016年9月7日、Veliko Tarnovo, Bulgaria

- ⑩ 石青松・足立俊明、
軌道ハープの比較定理、日本数学会 2016 年度秋季総合分科会、2016年9月15日、
関西大学
- ⑪ 石青松・足立俊明、
軌道ハープの比較定理 II、日本数学会 2017 年度年会、2017年3月25日、首都大学東京
- ⑫ 石青松・足立俊明、
アダマール多様体上の軌道の漸近挙動、
日本数学会 2017 年度年会、2017年3月25日、首都大学東京

[図書] (計 2 件)

- ① ADACHI, Toshiaki ・ HASHIMOTO, Hideya ・ HRISTOV, J. Milen、
World Scientific, Prospects of Differential Geometry and its Related fields, 2013, 228
- ② ADACHI, Toshiaki ・ HASHIMOTO, Hideya ・ HRISTOV, J. Milen、
World Scientific, Current Developments in Differential Geometry and its Related fields, 2015, 241

[産業財産権]

○出願状況 (計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

足立 俊明 (ADACHI, Toshiaki)
名古屋工業大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号：60191855

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

大塚 富美子 (OHTSUKA, Fumiko)
茨城大学・理学部・准教授
研究者番号：90194208

前田 定廣 (MAEDA, Sadahiro)
佐賀大学・大学院工学系研究科・教授
研究者番号：40181581

(4) 研究協力者

包 図雅 (BAO, Tuya)
中華人民共和国 内モンゴル民族大学・数学学院・准教授