

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 4 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540077

研究課題名(和文)低次元トポロジーの代数的・圏論的研究

研究課題名(英文)Algebraic and category-theoretic study of low-dimensional topology

研究代表者

葉廣 和夫(Habiro, Kazuo)

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：80346064

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：3次元トポロジーと関連する代数についてのいくつかのトピックスについて研究を行った。T.Widmer氏と共同で、3次元多様体の中のヌルホモトピックおよびヌルホモロガスな枠付き絡み目のKirby計算について研究した。A.Beliakova氏、Z.Guliyev氏、A.D.Lauda氏、B.Webster氏、M.Zivkovic氏らと共同で、量子群の圏化(特にリボン元、トレース、pivotal構造)について研究した。T.Q.T.Le氏と共同で、各有限次元複素単純リー代数 \mathfrak{g} に対して、整係数ホモロジー3球面の種々の1のべき根における量子 \mathfrak{g} 不変量を統一する不変量を構成した。

研究成果の概要(英文)：I studied several topics on 3-dimensional topology and related algebra. Jointly with T. Widmer, I studied Kirby calculus for null-homotopic framed links and null-homologous framed links in 3-manifolds. Jointly with A. Beliakova, Z. Guliyev, A. D. Lauda, B. Webster and M. Zivkovic, I studied categorified quantum groups, in particular the ribbon element, the traces and the pivotal structure. Jointly with T. Q. T. Le, for each finite dimensional complex simple Lie algebra \mathfrak{g} , I constructed an invariant of integral homology 3-spheres which unify the quantum \mathfrak{g} invariants at various roots of unity.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：3次元多様体 Kirby計算 量子群 圏化 トレース 量子不変量

1. 研究開始当初の背景

絡み目の Jones 多項式や 3 次元多様体の Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量が導入されて以来、絡み目と 3 次元多様体の代数的な研究が活発に行われている。これらの研究において最も適した枠組みは圏論的なものであると筆者は考えている。たとえば、さまざまな量子不変量の中でもっとも重要なもののひとつであるタングルの Reshetikhin-Turaev 不変量は、タングルの圏から量子群 (リボン Hopf 代数) の左加群の圏へのモノイダル関手として定義される。同様に、いわゆる位相的場の理論 (TQFT) はコボルディズムの圏からベクトル空間の圏への関手とみなすことができる。また、Khovanov ホモロジーの発見以来、量子不変量の圏化についての研究が盛んに行われている。

2. 研究の目的

- (1) 3 次元トポロジーにおける種々の代数的・圏論的構造について研究する。
- (2) 3 次元多様体と埋め込みの圏、および 3 次元多様体の量子基本群と量子表現空間について研究する。
- (3) 絡み目、3 次元多様体の量子不変量の圏化および量子群の圏化について研究する。

3. 研究の方法

研究目的のそれぞれについて、必要に応じて他の研究者と共同で研究を行う。研究打ち合わせと研究発表のための旅費に研究費を使用する。また、研究に必要な書籍や文房具などを研究費を使用して購入する。

研究の進展状況に応じて、柔軟に目標を修正しながら研究を進めていく。

4. 研究成果

(1) T. Widmer 氏と共同で、3 次元多様体の中の枠付き絡み目に関する Kirby カルキュラスについての論文を完成させた。この論文ではまず、Fenn と Rourke による閉 3 次元多様体の中の枠付き絡み目の Kirby 操作で生成される同値関係の特徴づけを、境界を持つ 3 次元多様体に対して一般化した。次に、この結果を枠付き絡み目の各成分が 3 次元多様体の中でヌルホモトピックである場合に対して応用し、そのような絡み目が Kirby 操作の列で移りあうための必要十分条件を与えた。

Widmer 氏と共同で、3 次元多様体の中のヌルホモトピックな枠付き絡み目に対する Kirby 計算について研究した。主結果は、3 次元多様体の中のヌルホモトピックな 2 つの絡み目が、境界のパラメトライゼーションと 1 次元ホモロジーの情報込みで同相となるための必要十分条件を、絡み目のある操作の列で移りあうことという形で定式化した。ここで通常の Kirby 操作の他に、IHX 操作というものを導入した。これは有限型不変量やクラーパー手術同値関係の理論に現れる IHX 関係

式に対応している。

(2) E. Contreras 氏と共同で、境界をもつスピン 3 次元多様体のポロミアン手術同値関係のホモロジー的な不変量による特徴づけについて研究を行った。予想された結果までは証明できず、3 次元多様体の 1 次元ホモロジー群が 2 トーションを持たない場合のみ、予想を証明することができた。一般の場合は未解決である。

(3) A. Beliakova 氏と共同で、量子 $sl(2)$ の圏化におけるリボン元に対応する複体の構成を行った。リボン元は量子群における重要な可逆元であり、中心に含まれる。論文ではリボン元に対応する複体の定義と、他の元との可換性に対応する性質、および可逆性に対応する性質を証明することができた。リボン元は普遍 R 行列にかなり近い構造であり、リボン元の圏化についての研究が普遍 R 行列の圏化の構成につながるのではないかと期待している。

(4) A. Beliakova 氏, A.D. Lauda 氏, M. Zivkovic 氏と共同で、量子群 $U_q(sl_2)$ の圏化のトレース (0 次 Hochschild-Mitchell ホモロジー) について研究した。一般に線形群のトレースはアーベル群となるが、この概念を線形 2 圏に適用することにより線形圏を得ることができる。この構成を $U_q(sl_2)$ の圏化に適用した。通常の圏化の場合には、split Grothendieck 群のときと同様に $U_q(sl_2)$ を回復するのであるが、次数付の圏化に適用すると sl_2 のカレント代数が出てくるのがわかった。これは予想していなかった意外な結果であり、以下の研究につながった。

A. Beliakova 氏, Z. Guliyev 氏, A. Lauda 氏と共同で、量子群 $U_q(sl_N)$ の圏化のトレースについてのサーベイ論文を完成させた。この中で、 sl_N の場合の圏化のトレースの、圏化の中心 (2 圏における恒等 1 射の自己 2 射の全体) への作用について考察した。

A. Beliakova 氏, A.D. Lauda 氏, B. Webster 氏と共同で、simply-laced な Cartan 行列に対応する量子群 $U_q(g)$ の圏化のトレースについて研究した。特に、ADE 型の場合に、このトレースがリー代数 g のカレント代数と同型になることを証明した。この証明には、量子群の圏化の cyclotomic 商のトレースがカレント代数の Weyl 加群と同型になるということを使っている。

(5) Khovanov, Lauda, Rouquier による量子群の圏化は 2 圏として実現されているが、この 2 圏において、1 射の 2 回双対がもとの射と同一になる (つまり、2 圏が cyclic または pivotal となる) ように、量子群の圏化の 2 圏構造を変形することができるという結果を A. Beliakova 氏, A.D. Lauda 氏, B. Webster 氏と共同で得た。この結果により、量子群の

圏化におけるダイアグラムを使った計算がより容易になることが期待される。

(6) T.Q.T. Le 氏と共同で、一般の複素有限次元単純リー代数 \mathfrak{g} に付随する量子群から得られる、3次元多様体の量子不変量(いわゆる量子 \mathfrak{g} 不変量)を、整係数ホモロジー3球面の場合に統一する、整係数1変数多項式環のある完備化に値を持つ不変量を構成した。これは、2008年の論文で筆者がリー代数 \mathfrak{sl}_2 の場合に構成した不変量の一般化である。

(7) 研究の目的に挙げられている上記以外の事項(特に3次元多様体の量子基本群および量子表現空間)については、論文の完成には至っていないものの、研究を進め、論文の準備を行っている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

A. Beliakova, K. Habiro, A. D. Lauda and B. Webster, Cyclicity for categorified quantum groups, *J. Algebra* 452 (2016) 118-132.
DOI:10.1016/j.jalgebra.2015.11.041

K. Habiro and T. Q. T. Le, Unified quantum invariants for integral homology spheres associated with simple Lie algebras, *Geom. Topol.*, to appear
<http://msp.org/gt/>

A. Beliakova, Z. Guliyev, K. Habiro, and A. D. Lauda, Trace as an alternative decategorification functor, *Acta Math. Vietnam.* 39 (2014) 425-480.
DOI:10.1007/s40306-014-0092-x

A. Beliakova, K. Habiro, A. D. Lauda and M. Živković, Trace decategorification of categorified quantum $\mathfrak{sl}(2)$, *Math. Ann.* (published on line)
DOI:10.1007/s00208-016-1389-y

E. Contreras and K. Habiro, Borromean surgery equivalence of spin 3-manifolds with boundary, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* 14 (2015) 1271-1282
DOI:10.2422/2036-2145.201307_002

K. Habiro and T. Widmer, On Kirby calculus for null-homotopic framed links in 3-manifolds, *Algebr. Geom. Topol.* 14 (2014) 115-134
<http://dx.doi.org/10.2140/agt.2014.14.115>

K. Habiro and G. Massuyeau, From

mapping class groups to monoids of homology cobordisms: a survey, *Handbook of Teichmüller Theory III*, 465-529, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 17, European Mathematical Society, 2012.
DOI 10.4171/103

[学会発表](計24件)

K. Habiro, On the category of finitely generated free groups, *Low dimensional topology and number theory VIII*, 2016/3/22, IMAQ Seminar Room, Innovation Plaza, 福岡県福岡市

K. Habiro, Category of bottom tangles with colored tangles, *Séminaire Quantique*, 2015/12/7, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg (フランス)

K. Habiro, Traces of categorified quantum groups, *Braids, Configuration Spaces, and Quantum Topology*, 2015/9/8, 東京大学数理科学研究科

K. Habiro, Trace decategorification of categorified quantum groups, *Diagram algebra and topology*, 2015/8/4,5, Hotel Sports Lodge Itoman, 沖縄県糸満市

K. Habiro, Quantum groups and topology, *Diagram algebra and topology*, 2015/8/3, Hotel Sports Lodge Itoman, 沖縄県糸満市

K. Habiro, Functors on Lagrangian cobordisms associated to ribbon Hopf algebras, *New Developments in TQFT*, 2015/7/30, Center for Quantum Geometry of Moduli Spaces, Aarhus University, Aarhus (デンマーク)

K. Habiro, Trace and categorification, *Categorification in Algebra, Geometry and Physics (A conference in honor of the 60th birthday of Christian Blanchet)*, 2015/5/6, Institut d'Études Scientifiques de Cargèse, Cargèse (フランス)

K. Habiro, Traces of categorified quantum groups, *Low dimensional topology and number theory VII*, 2015/3/27, IMAQ Seminar Room, Innovation Plaza, 福岡県福岡市

K. Habiro, Trace decategorification of categorified quantum $\mathfrak{sl}(2)$, *Winter School on Representation Theory*, 2015/1/20, 京都大学数理解析研究所

葉 廣 和 夫, Kirby calculus for

null-homologous framed links in 3-manifolds, 多様体のトポロジーの展望, 2014/11/30, 東京大学大学院数理科学研究科

K. Habiro, Kirby calculus for null-homologous framed links in 3-manifolds, Knots and Low Dimensional Manifolds, 2014/8/22, BEXCO Convention & Exhibition Center II, Busan (大韓民国)

K. Habiro, Kirby calculus over $K(G,1)$, Low dimensional topology and number theory VI, 2014/3/21, Soft Research Park Center, 福岡県福岡市

K. Habiro, Kirby calculus for null-homologous framed links in 3-manifolds, Modern Trends in Topological Quantum Field Theory, 2014/2/21, Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics, University of Vienna, Vienna (オーストリア)

葉廣和夫, 量子トポロジー, 連続講演, 2014/1/6-8, 東京大学大学院数理科学研究科

K. Habiro, Kirby calculus for null-homologous framed links in 3-manifolds, Quantum topology and hyperbolic geometry, 2013/5/13, Yasaka Saigon Nhatrang Resort Hotel, Nha Trang (ベトナム)

K. Habiro, Category-theoretic structures in 3-dimensional topology, Mini-courses before the conference "Quantum topology and hyperbolic geometry", 2013/5/6-10, Institute of Mathematics, Hanoi (ベトナム)

K. Habiro, Kirby calculus for null-homologous framed links in 3-manifolds, Low dimensional topology and number theory V, 2013/3/13, Soft Research Park Center, 福岡県福岡市

K. Habiro, Quantum fundamental groups of 3-manifolds I, II, III, The 9th East Asian School of Knots and Related Topics, 2013/1/14, 15, 16, 東京大学数理科学研究科

K. Habiro, Quantum fundamental groups I, II, III, Winter Braids III, 2012/12/17, 19, 20, Université de Grenoble, Grenoble (フランス)

K. Habiro, Quantum fundamental groups of 3-manifolds, Séminaire de Topologie,

2012/12/11, Institut Mathématiques de Jussieu, Université Paris 6, Paris (フランス)

21 K. Habiro, Kirby calculus for null-homologous framed links in 3-manifolds, Groupe de travail TQFT et catégorification, 2012/12/10, Institut Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7, Paris (フランス)

22 K. Habiro, Kirby calculus for null-homologous framed links in 3-manifolds, Séminaire de Topologie, 2012/11/23, Institut Fourier, Université de Grenoble, Grenoble (フランス)

23 K. Habiro, Quantum fundamental groups of 3-manifolds, Low-Dimensional Topology and Number Theory, 2012/8/29, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Oberwolfach (ドイツ)

24 K. Habiro, On the structure of the mapping class category, Mapping class groups and quantum topology, 2012/6/29, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg (フランス)

[図書](計0件)

[産業財産権]
出願状況(計0件)
取得状況(計0件)

[その他]
ホームページ等
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~habiro>

6. 研究組織

(1) 研究代表者
葉廣 和夫 (HABIRO, Kazuo)
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号: 80346064

(2) 研究分担者
なし

(3) 連携研究者
なし