

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 29 年 5 月 20 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2016

課題番号：24540082

研究課題名(和文) 2次元滑らか結び目解け予想の解決とその発展

研究課題名(英文) Solving the smooth unknotting conjecture in dimension four and its development

研究代表者

松本 堯生 (Matumoto, Takao)

京都大学・数理解析研究所・特任教授

研究者番号：50025467

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：補空間の基本群が無限巡回群なら2次元滑らか結び目は解けるという2次元滑らか結び目解け予想を、執筆中の交点がある2次元結び目に対するマルコフ型定理を仮定して、交点数1の広義2次元ブレイドの1助変数族で自明な結び目を表す2次元ブレイドにつながる場合に帰着した。  
また帰着した結果から、元の結び目が自明かは不明だが、自明なトーラス結び目を連結すると自明なトーラス結び目に微分同相になることも示した。

研究成果の概要(英文)：The smooth unknotting conjecture in dimension four is reduced to the case which is connected by a one-parameter family of braided surfaces with at most one intersection point to the 2-dimensional braid representing an unknot, by assuming our writing Markov type theorem. Moreover, in this case we do not know that the given knot is trivial yet but we see that its connected sum with the trivial torus knot is diffeomorphic to the trivial torus knot.

研究分野：数学とくに幾何学・多様体論・トポロジーなど

キーワード：2次元結び目 2次元ブレイド 4次元トポロジー 数学史

### 1. 研究開始当初の背景

微分トポロジーは一般化されたポアンカレ予想等で 1960 年代に華々しく幕を開け、結び目理論もほぼ同時期にデーネ補題の証明が与えられ発展した。さらに、 $(n - 2)$ 次元球面の  $n$  次元球面への局所平坦な埋め込みは補空間が円周とホモトピー型が等しければ  $n = 4$  以外で自明な埋め込みと同相であり、微分可能な埋め込みなら微分同相でもあることも証明された。1980 年代にはフリードマンとドナルドソン等によって 4 次元多様体の研究が著しく進み、4 次元位相ポアンカレ予想および 2 次元球面の 4 次元球面への局所平坦な埋め込みの位相的結び目解け予想は解決されている。

しかしながら、4 次元可微分多様体の研究は、ゲージ理論ばかりでなく古典結び目の新たな量子不変量構成にも刺激され、国内外とも不変量によって微分構造を区別する方向に向かい、4 次元ホモトピー球面が 4 次元球面と微分同相であるかという「4 次元滑らかポアンカレ予想」および 2 次元球面が 4 次元空間に滑らかに埋め込まれ補空間の基本群が無限巡回群のとき自明な埋め込みに微分同相であるかという「2 次元滑らか結び目解け予想」の二つの予想は依然として未解決のままである。

さらに、ペレルマンによってサーストンの幾何化予想ひいては 3 次元ポアンカレ予想が解かれたので、古典的な微分トポロジーの未解決大問題は上の二つになってしまったのである。

### 2. 研究の目的

古典的微分トポロジーの 2 大未解決問題の一つである「2 次元滑らか結び目解け予想」を解決することが第 1 目的である。さらにそれを発展させ、数学史を含む数学研究環境を良くすることに貢献したい。

予想を 2 次元ブレイドの 1 助変数族に関する問題に翻訳し、予想を特別な場合に帰着させること、帰着された問題の具体的な解析方法を与えることは重要であり、それによって目的が達成できると考えている。

### 3. 研究の方法

2 次元滑らか結び目の解け予想解決の出発点は、与えられた結び目と自明な結び目をつなぐカスプによる 2 重点の生成と消滅のみを許した球面からの写像の 1 助変数族を構成したことである。この 1 助変数族を 2 次元ブレイドの 1 助変数族に変換することはマルコフ型定理であって、研究分担者鎌田聖一氏の手法を交点がある場合に拡張すればよい。また、交点は動かないとしてマルコフ

型定理を適用するので、最後のカスプに対応するチャートでの変形つまりノードと端点の融合・分裂は別途強制的に行う。このことによって、交点が 2 個以上ある場合に、2 重点の逆像が 2 次元球面と区間の直積の中で絡まることは自然に避けられるのである。

さて、最も簡単なチャートは  $n$  本の向きのついた線分のそれぞれに 1 から  $n$  までのラベルが付いたものであり、これを自明なチャートと呼ぶ。2 次元ブレイドとしては、 $n + 1$  枚からなり、それぞれの線分の端点は指数 2 の分岐を表している。また、自明なチャートは自明な 2 次元結び目を表す。さて与えられた 2 次元結び目もアレクサンダー型定理により、2 次元ブレイド従ってチャートで表され、上で述べたようにこの二つは特異 2 次元ブレイドつまり線分上に 4 次元空間内の交点を表すノードを持つかも知れないチャートの 1 助変数族でつながる。チャートは端点とノード以外に、ブレイド群の関係式に対応して 3 つの線分が 1 点で交わる白頂点とラベルの差が 2 以上の 2 線分が交わる交点を持っている可能性がある。また、単純でないチャートの 1 助変数族とは、安定化で新しく現れる線分の端点が他の既にある端点にくっ付くこと及びその逆を途中で許すことである。このような場合を込めて、まず途中でブレイドの枚数が変わらないように、枚数を増やして全体の安定化を図る。さらに部分的な安定化をしながら、うまく高さ関数を調整するとなんと交点数が 1 で途中は全て単純なチャートの 1 助変数族が分離できるのである。我々はチャートの 1 助変数族を円柱の中の特別な曲面族として見ているので、この操作はきちんと立体図で書ける。分離した交点数 1 の部分は、自明なチャートからの変化をブレイド群の生成元の語の変化で記述することができる。さらに、本質的には語の関係式の数による帰納法によって、もう一方も自明なチャートになることを示すことができるはずである。最後は交点数に関する帰納法で二つの結び目はイソトピックになる。

### 4. 研究成果

特異 (= 自己交叉を持つ) 2 次元結び目に關するマルコフ型定理の証明は完成していないが、その準備段階の鎌田氏との共著論文は雑誌に掲載決定済である。

マルコフ型定理を仮定すると与えられた結び目と自明な結び目を結ぶカスプによる 2 重点の生成と生滅のみを許した広義 2 次元ブレイドの 1 助変数族ができるが、このような 1 助変数族があれば元の結び目に自明なトラス結び目を連結和すると自明なトラス結び目に微分同相になることが分かった。このことは 2016 年 11 月に大阪市立大学で開催された「4 次元トポロジー」研究集会で発表している。

当初の目的を達成するためには、マルコフ型定理の証明をさらに検討し、結論の種数を

もうひとつ下げる必要がある。そのため種々の幾何学構造等を考慮するなど多角的な研究を進めている。

また、数学史に関して雑誌「数学」に上記二つの予想の意義を解説した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者には下線)

(雑誌論文)(計 33 件)

[1] 松本 堯生, 微分トポロジーの誕生と発展 - 50 年代から 70 年代初頭までといくつかの未解決問題 -, 数学 69(2017), 91-98. 査読有

[2] Seiichi Kamada and Takao Matumoto, Chart descriptions of regular braided surfaces, Topology Appl. 掲載決定済, 査読有

[3] Yewon Joung, Seiichi Kamada, Akio Kawauchi and Sang Youl Lee, Polynomial of an oriented surface-link diagram via quantum  $\mathcal{A}_2$  invariant, Topology Appl. 掲載決定済, 査読有

[4] Seiichi Kamada and Kengo Kawamura, Ribbon-clasp surface-links and normal forms of immersed surface-links, Topology Appl. 掲載決定済, 査読有

[5] K. Kaur, S. Kamada, A. Kawauchi, M. Prabhakar, Gauss diagrams, unknotting numbers and trivializing numbers of spatial graphs, Topology Appl. 掲載決定済, 査読有

[6] Naoko Kamada and Seiichi Kamada, Double coverings of twisted links, J. Knot Theory Ramifications 25(2016), DOI 10.1142/S021821651641011X (22 pages), 査読有

[7] Seiichi Kamada, Hiroshi Tamaru and Koshiro Wada, On classification of quandles of cyclic type, Tokyo J. Math. 39 (2016), 157-171, 査読有

[8] Seiichi Kamada, Surface-knots. Knot theory and its applications. Contemporary Mathematics 670(2016), 93-103. 査読有

[9] Ken'ichi Ohshika and Makoto Sakuma, Subgroups of mapping class groups related to Heegaard splittings and bridge decompositions, Geom. Dedicata 180(2016), 117-134. DOI 10.1007/s10711-015-0094-4 査読有

[10-11] Donghi Lee and Makoto Sakuma, Homotopically equivalent simple loops on 2-bridge spheres in Heckoid orbifolds for 2-bridge links (I),(II). J. Knot Theory Ramifications 25(2016), DOI 10.1142/S021821651650067X 22pp 10.1142/S0218216516500668 22 pp. 査読有

[12] Donghi Lee and Makoto Sakuma, Parabolic generating pairs of genus-one

2-bridge knot groups. J. Knot Theory Ramifications 25(2016), DOI 10.1142/S0218216516500231, 21 pp. 査読有

[13] J. Scott Carter and Seiichi Kamada, Three-dimensional braids and their descriptions. Topology Appl. 196(2015), 510-521. 査読有

[14] Seiichi Kamada, Jieon Kim and Sang Youl Lee, Computations of quandle cocycle invariants of surface-links using marked graph diagrams. J. Knot Theory Ramifications 24(2015), DOI 10.1142/S0218216515400106, 35 pp. 査読有

[15] Yewon Joung, Seiichi Kamada and Sang Joung Lee, Applying Lipson's state models to marked graph diagrams of surface-links. J. Knot Theory Ramifications 24(2015), DOI 10.1142/S0218216515400039, 18 pp. 査読有

[16] Seiichi Kamada, Victoria Lebed and Kokoro Tanaka, The shadow nature of positive and twisted quandle invariants of knots. J. Knot Theory Ramifications 24(2015), DOI 10.1142/S0218216515400015, 15 pp. 査読有.

[17] J. Scott Carter and Seiichi Kamada, How to fold a manifold, Series on Knots and everything 56(2015), 31-77. 査読有.

[18] R. Inanc Baykur and Seiichi Kamada, Classification of broken Lefschetz fibrations with small fiber genera, J. Math. Soc. Japan 67(2015), 877-901. 査読有.

[19] Hisaaki Endo and Seiichi Kamada, Chart description for hyperelliptic Lefschetz fibrations and their stabilization, Topology Appl. 196(2015), 416-430. 査読有.

[20] Seiichi Kamada, Quandles and symmetric quandles for higher dimensional knots, Knots in Poland III, Banach Center Publications 103 (2014), 145-158. 査読有

[21] Seiichi Kamada, Cords and 1-handles attached to surface-knots, Bol. Soc. Mat. Mex. 20 (2014), 595-609. 査読有

[22-24] Donghi Lee and Makoto Sakuma, Homotopically equivalent simple loops on 2-bridge spheres in 2-bridge link complements (I),(II),(III). Geom. Dedicata 171 (2014), 1-28, 29-56, 57-91. 査読有

[25] Hiroataka Akiyoshi, Donghi Lee and Makoto Sakuma, A variation of McShane's identity for 2-bridge links and its possible generalization, Analysis and Geometry of Discrete Groups and Hyperbolic Groups, RIMS Kokyuroku Bessatsu B48 (2014), 131-147. 査読有

[26] Takao Matumoto and Tomohiro Chijiwa, Exhibition of Mathematical Methods

(English Translation of Sanpo-Hakki 算法發揮), RIMS Kokyuroku 1831(2013), 130-157. 査読無

[27] Donghi Lee and Makoto Sakuma, A variation of McShane's identity for 2-bridge links, *Geom. Topol.* 17 (2013), 2061-2101. 査読有

[28-29] Donghi Lee and Makoto Sakuma, Epimorphisms from 2-bridge link groups onto Heckoid groups (I),(II). *Hiroshima Math. J.* 43 (2013), 239-264, 265-284 査読有

[30] Seiichi Kamada, Chart description for genus-two Lefschetz fibrations and a theorem on their stabilization, *Topology Appl.* 159 (2012), 1041-1051. 査読有

[31] Naoko Kamada and Seiichi Kamada, Biquandles with structures related to virtual links and twisted links, *J. Knot Theory Ramifications*, 21(2012), DOI 10.1142/S0218216512400068 14 pp. 査読有

[32] J. Scott Carter and Seiichi Kamada, Braids and branched coverings of dimension three. *RIMS Kokyuroku* 1812 (2012), 64-81. 査読無

[33] 鎌田聖一, quandle と結び目不変量, *数学* 64(2012), 304-324. 査読有

〔学会発表〕(計 31 件中 14 件)

[1] 松本堯生, On the smooth unknotting conjecture in dimension four XII, Nov. 27, 2016, 4 次元トポロジー, 大阪市立大学, 大阪市.

[2] Seiichi Kamada, Classification of 1-handles attaching to surface-links using quandles, May 6, 2016, Int. Workshop on Low-dimensional Topology in Dalian, Dalian Univ. Tec. (Dalian, China)

[3] Seiichi Kamada, Tensor products of quandles and classification of 1-handles attaching to surface-links, Sept. 20, 2016. *Topology Days in Caen II*, Univ. of Caen-Normandy (Caen, France)

[4] Seiichi Kamada, Clasp-ribbon surface-links in 4-space, *Knots in Washington*, Dec. 9, 2016, G. Washington Univ. (Washington DC. U.S.A.).

[5] 作間誠, 結び目と 3 次元多様体 - 幾何構造とファイバー構造を中心にして -, July 6, 2016 トポロジー・シンポジウム, 神戸大学, 神戸市.

[6] Takao Matumoto, Smooth unknotting conjecture in dimension four, *East Asian School of Knots and related topics*, Jan. 28, 2016. 大阪市立大学, 大阪市

[7] Seiichi Kamada, On braid description of surface-links in the 4-space, Nov. 27, 2015 The 1<sup>st</sup> Pan Pacific Int. Conference on Topology and Applications, Min Nan Normal

Univ. (Zhangzhou, China)

[8] 作間誠, The Cannon-Thurston maps and canonical decompositions of punctured surface bundles over the circle, June 30, 2015, トポロジー火曜セミナー, 東京大学, 東京都.

[9] 松本堯生, 微分トポロジーの誕生・展開・未解決問題, Jan. 21, 2015, 大談話会, 京都大学, 京都市.

[10] Seiichi Kamada, Cords attached to links and surface-links and quandles, July 23, 2014, Normal Institute for Mathematical Sciences (Daejeon, Korea)

[11] 松本堯生, On some elementary deformations of quasi-trivial charts. Jan. 25, 2014. Hurwitz action ひねる代数, 草津セミナーハウス(草津町・群馬県)

[12] Seiichi Kamada, A chart description of simple or regular surface braids, Nov. 8, 2013, UL Math. Conf., Univ. Louisiana at Lafayette, U.S.A.

[13] 鎌田聖一, 2 次元ブレイドとチャート表示, Aug. 6, 2013, トポロジー・シンポジウム, 大阪市立大学, 大阪市

[14] 松本堯生, On the smooth unknotting conjecture in dimension four VIII, Nov. 15, 2012 広島大学, 東広島市

〔図書〕(計 3 件)

[1] Seiichi Kamada, *Surface knots in 4-space: An introduction*, 2017. Springer 212 pp.

[2] 松本堯生(訳), *ハーシュ: 微分トポロジー*, シュプリンガー数学クラシックス 25 (2012). 丸善出版 287 頁

[3] 鎌田聖一, *曲面結び目理論*, シュプリンガー現代数学シリーズ, 16(2012). 丸善出版 247 頁

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

松本 堯生 (MATUMOTO TAKAO)  
京都大学・数理解析研究所・特任教授  
研究者番号: 50025467

### (2) 研究分担者

鎌田 聖一 (KAMADA SEIICHI)  
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 60254380

作間 誠 (SAKUMA MAKOTO)  
広島大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号: 30178602