2版

様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ８ 日現在

機関番号：１７１０２
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2012～2014
課題番号：２４５４００８３
研究課題名（和文）多様体上の有限群作用の軟性について

研究課題名（英文）Flexibilities of finite group actions on manifolds

研究代表者
角　俊雄（Sumi, Toshio）

九州大学・基幹教育院・准教授

研究者番号：５０２５８５１３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、多様体上の有限群の滑らかな作用がもたらす固定点上の接表現空間を研究した。特に、球面上の孤立固定点のみをもつ有限群作用について考察を行った。ホモトピー球面上の滑らかな２固定点作用において、固定点集合上の接空間が実表現と同一視され、その差が表す実表現環の部分集合（スミス集合）をあるクラスにおいて決定した。
また、手術理論に有用な条件をもつ有限群であるギャップ群になるための条件を中心化群、正規化群の正規性をもちいて表した。

研究成果の概要（英文）：I studied representation spaces induced by smooth actions on manifolds of finite groups. In particular, I studied finite group smooth actions on spheres. The Smith problem, whether tangential representation spaces over fixed points of a sphere with just two fixed points are isomorphic?, is fundamental one for transformation group theory. I determinied the Smith set which consists of the differences of tangential representative spaces over such a sphere for some class of finite groups. I also gave a sufficient and necessary condition for a finite group to be a gap group by viewing centralizers and normalizers.

研究分野：変換群論

キーワード：有限群作用　スミス集合　実表現

１．研究開始当初の背景

変換群論の１つの目標は，作用をもつ多様体の分類である。多様体 M の構造を，固定点集合が M となる同変多様体N を構成し，N 上の（同変）理論を応用し解析できるための手段を提供したい。多様体に自由な作用はなかなか入らないように，ある条件を満たすような群作用を導入できるかを決定するのは難しいが，構造が簡単な多様体，ディスクや球面に対しては，多くの作用を入れることができることが知られている．一方球面上の２固定点作用で、節空間のペアにどのようなものが得られるかよくわかっていない状況である。必要条件は２つほど知られているが、それらがどの程度十分条件に近いか調べることによって、多様体上の作用の構造を研究する。

２．研究の目的

変換群論の１つの目標は，作用をもつ多様体の分類である。多様体 M の構造を，固定点集合が M となる同変多様体 N を構成し，N 上の（同変）理論を応用し解析できるための手段を提供したい。

多様体に自由な作用はなかなか入らないように，ある条件を満たすような群作用を導入できるかを決定するのは難しいが，構造が簡単な多様体，ディスクや球面に対しては，多くの作用を入れることができることが知られている．そのため，本研究では，多様体 N を固定点集合とするような M 上の群作用をいついれることができるのかを考察し，その理論を構築するのを目的とした。

多様体に群作用に関しては，多くの研究者によって研究されてきているが、依然として未解決な問題が残されている。群 G 作用における同変写像 f が与えられた時，自然に群 G の閉部分群 H における固定点集合間の写像 f^H が誘導されるが，もし，f が G-同相であれば，f^H は $N_G(H)/H$-同相である。

このように, 同変 G-写像 f に対し，f^H に，同変の意味での f の性質は，f^H へ群作用なし（もしくは，$N_G(H)/H$ 作用）における性質へ誘導される。この逆問題を考えるとき，f^H たちの整合性が問題となる。

与えられた多様体を，群全体での固定点集合として実現する同変多様体は存在するかという問題が考えられる。この問題に関して，同変多様体をディスクもしくはユークリッド空間とした場合，固定点として現れる多様体については，Oliver [O]が完全に解答を与えた。そこで，次のターゲットである球面に関して考察をおこなう。その理由としては，球面は，ディスクと構造が近いこと，また，同変多様体 M と同変 connected sum ができる球面S があれば, M#S はM と同相で，つまり, M の作用と異なる作用を入れることができることがあげられる。さらには，M_1, M_2 が作用を忘れたとき同相であるとき，同変球面の列 S_1、S_2、…、S_k で，
M_1、$M_2=M_1\#S_1$、$M_3 = M_2\#S_2$、…、$M_2 = M_k\#S_k$ となる列の存在が必要十分条件かを求める手助けとなる。

多様体に群作用があると，そのことからさまざまな条件を引き出すことができる。通常は群作用が入る場所では，きれいな構造が期待される。しかしながら，Oliver [O] の結果を見てもわかるように，isotropy subgroups を豊富にもつ空間ではいびつな状況を起こらせることが可能である。

主な課題は以下のとおりである。有限群作用と閉多様体を扱い，有限群と閉多様体を与えた場合，その多様体上に滑らかにその有限群が作用し，固定点の近傍にどのような多様体が存在するのか研究する。Oliver [O] のディスク上の固定点集合として得られる多様体の結果を，全体の固定点集合ではなく，ある真部分群による固定点集合として得られる多様体の結果に拡張することを考える。

３．研究の方法

まずは，現状の手法が適用できない可能性のある有限群のクラスの特徴を抽出し、そのクラスの群に関して、ディスク上の作用について、十分大きな部分群による固定点集合の現れ方について考察を行う。その際、同変に太らせること、同変手術、同変バンドル拡張手法、同変バンドル控除法といった理論の適用についても同時に考察する必要がある。このような、球面上の作用に関しての考察により、一般の多様体の作用に関して応用が期待される。まずは群全体での固定点集合が有限個の点である場合に限定して考察を行う。固定点集合 M^G が１点の場合、その近傍であるディスクをとりのぞくと、固定点集合をもたないディスクが作れる。固定点集合をもたないディスク上の作用をもつ有限群は、Oliver [O] によって決定され、オリバー群と呼ばれている。例えば、非可解群はオリバー群である。Morimoto [M1] は、球面上の作用で固定点が１点であるもの（以下，n 個の固定点をもつ作用を n 固定点作用とよぶ）を許容する有限群について考察し，Laitinen との共同研究において，オリバー群であることが必要十分条件であることを示した。一般の向き付けられた多様体については、オイラー数が負になることもあるので、上記と同様にはいかないが、固定点の個数を調べるには、球面上の作用が重要となる。考えている作用は滑らかな作用なので、微分をとることができる。すると、作用の微分によって，固定点上の接空間に線形な作用が入る。つまり、その接空間は実表現と思うことが出来る。それを，接表現と呼ぶ。G がオリバー群であれば、いかなる自然数 n に対しても，球面上の n 固定点作用をもつ。球面上の接空間に現れる実表現を特定すれば、１つの多様体から、同変連結和によって、固定点の数をコントロールできる場合が特定できる。この手法は固定点が０次元でない場合にも適用できると思われ

る。
球面上の２固定点作用において、接表現の差を完全に決定したい。球面上の２固定点作用において、接表現が同型にならない例がある有限群について、基盤研究 C 「多様体における有限群作用の固定点上の接空間となる表現に関する研究」での研究をさらに進めた。Oliver [O] の研究により、ディスク上およびユークリッド空間上の作用において固定点集合として得られる多様体にどのようなものが発生するのか完全に決定されている。本研究では、M を球面やディスクに限って、さらに部分群 H を大きなものに限り、一般の多様体を意識しながら、球面上の２固定点作用において、接表現の差の考察から出発し、M^H として実現できる集合について考察を行った。
球面はディスク２枚を張り合わせてできるので、ディスク上の作用を応用できる。Oliver [O] は、ディスクおよびユークリッド空間上の有限群作用の固定点集合として実現できる多様体を、有限群をいくつかのクラスに分け完全に求めている。シロー群に制限すれば同型であり、全体での固定点集合の次元はそれぞれ、0 と 1 であるような２つの実表現が存在する有限群のクラスを M_R とする。特にオリバー群であり、クラス M_R に属する有限群に対して、どんなコンパクト多様体もディスク上の固定点集合となる群作用が存在する。この分類に対応する、球面上の有限群作用の分類が必要となる。Morimoto [M2] は、球面上の２固定点作用の場合、その上の接空間は、群の指数２の部分群での固定点集合である実表現は同型でなければならないことを指摘した。このことはディスク上の作用では問題とならなかったことである。このように、ディスク上の作用がそのまま適用できない場合の回避をいかに行うかがカギとなる。特に、素数べき位数をもつ正規部分群による固定点集合としてどのようなものが得られるかが問題となる。コンピュータを用い、さまざまな群に対し実験を行いながら、問題の本質を見極め、考察を行った。

４．研究成果

Laitinen 予想とは、「球面上にちょうど２つの固定点をもつ滑らかなオリバー群の作用が与えられたとき、素数べき位数の部分群での固定点集合が連結であるならば、その固定点上の接空間を群の表現とみたとき同型に限るのは、実共役類の個数が２以下である」というものである。残念ながら、Laitinen 予想は森本 [M2]、により非可解群での反例が与えられた。この反例が、非可解群で唯一であることを Pawalowski-Sumi [PS]にて示した。しかし可解群においては数個の反例がやはり存在する。構成法を考察すると、球面上にちょうど２つの固定点をもつ滑らかな有限群の作用が与えられたとき、その固定点上の接空間を群の表現の同型類の差の集合、つまり、実表現環の部分集合をスミス集合という。Laitinen 予想は、スミス集合のある部分集合（以下連結スミス集合と呼ぶ）が 0 のみであるのが、実共役類の個数が２以下であることと同値であるので、スミス集合がどんな集合なのか考察する意味がある。

非可解群のクラス、交代群 A_n、対称群 S_n、射影特殊線形群 PSL(2,q)、PSL(3,q)、射影特殊一般線形群 PGL(2,q)、PGL(3,q)、射影特殊ユニタリ群 $PSU(3,q^2)$、および散在単純群とその自己同型群に関して、スミス集合を完全に決定した。とくにスミス集合は、連結スミス集合と一致し、実表現環の部分群になっている。

多様体 M 上の有限作用の構成に、素数べき部分群 P とそれを含む部分群 H に関して、次の次元に関する不等式

$$\dim M^P > 2 \dim M^H$$

が成り立つと扱いやすい。これを M のギャップ条件という。ここで、群の表現 V で、上記次元に関する不等式

$$\dim V^P > 2 \dim V^H$$

および、素数べき指数の部分群 L に対して

$$\dim V^L = 0$$

を満たすものが存在するとき、有限群 G をギャップ群という。スミス集合を完全に決定した上記の群はほとんどギャップ群である。

アプローチは、ギャップ群とそうでない場合と２通りに分かれる。ギャップ群であるかは、$O^2(G)$に含まれない元で生成される巡回群の正規化群の条件で与えることができ、具体的にギャップ表現を求めることができた。それを用いて、ギャップ条件を満たす球面上のオリバー群の作用に制限したスミス集合、強スミス集合を考えると、強スミス集合は強連結スミス集合と一致する。この集合がスミス集合と一致するための条件を求めた。コンピュータを用いて、その条件を満たさないオリバー群を探したが、見つかっていない。そのため、存在するとしても、非常に特殊な群に限られると予想される。

引用文献
[O] B. Oliver、Fixed point sets and tangent bundles of actions on disks and Euclidean spaces、Topology、Vol.35、1996、pp. 583-615
[M1] E. Laitinen and M. Morimoto、Finite groups with smooth one fixed point actions on spheres、Forum Mathematicum、Vol.10、1998、pp. 479-520
[M2] M. Morimoto、Smith equivalent $Aut(A_6)$-representations are isomorphic、Proceedings of the American Mathematical Society、Vol.136、2008、3683-3688
[PS] 雑誌論文①

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　５件）

① K. Pawalowski and T. Sumi、The Laitinen Conjecture for finite non-solvable groups、Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society、査読有、Vol.56、2013、pp. 303-336、
http://dx.doi.org/10.1017/S0013091512000223

② 角　俊雄、Tangential representations on a sphere、RIMS 講究録、査読無、Vol.1876、2014、pp. 127-135

③ 角　俊雄、Centralizers of gap groups、Fundamenta Mathematicae、査読有、Vol.226、2014、pp. 101-121、
http://dx.doi.org/10.4064/fm226-2-1

④ 角　俊雄、Tangential representations on a sphere、RIMS 講究録、査読無、Vol.1876、2014、pp. 127-135

⑤ 角　俊雄、Smith sets of non-solvable groups whose nilquotients are cyclic groups of order 1, 2, or 3、RIMS 講究録別冊、査読有、B39、2013、pp. 149-165.

〔学会発表〕（計　６件）

① 角　俊雄、The Smith equivalence problem and Smith sets of Oliver groups、日本数学会秋季総合分科会（招待講演）、九州大学（福岡県福岡市西区元岡）、2012.9.18

② 角　俊雄、The Smith equivalence problems for finite Oliver groups、研究集会「Geometry of manifolds and groups actions」、Gdansk University of Technology、Poland、2012.9.8

③ 角　俊雄、Tangential representations on a sphere、RIMS 研究集会「変換群のトポロジーとその周辺」、京都大学数理解析研究所（京都府京都市左京区北白川）、2013.5.30

④ 角　俊雄、Nonsolvable groups possessing gap modules、研究集会「Knots, Manifolds, and Group Actions」、Slubice、Poland、2013.9.11

⑤ 角　俊雄、Note on tangential representations on a sphere、DMV-PTM Mathematical Meeting、Poznan、Poland、2014.9.18

⑥ 角　俊雄、Construction of gap modules、第４１回変換群論シンポジューム、蒲郡市民会館（愛知県蒲郡市栄町）、2014.11.14

〔その他〕
ホームページ等
http://www.artsci.kyushu-u.ac.jp/~sumi/

６．研究組織

(1)研究代表者

角　俊雄（SUMI Toshio）
九州大学・基幹教育院・准教授
研究者番号：　５０２５８５１３