様　式　C－19、F－19、Z－19　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 28 年　 5 月 28 日現在

機関番号：14401
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2015
課題番号：24540084

研究課題名（和文）共形構造および射影構造の微分幾何

研究課題名（英文）Differential geometry of conformal structures and projective structures

研究代表者
小林　治（Kobayashi, Osamu）

大阪大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：10153595

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,900,000円

研究成果の概要（和文）：共形幾何的面においては，平成25年度に閉曲線の正則ホモトピー不変量を共形微分幾何の言葉で表す結果を得た．論文は平成26年度に発表した．これは Smale の正則ホモトピーの理論の微分幾何学化の第1段階と考える．
射影幾何的側面においては，シュワルツ微分を用いてリーマン多様体の閉曲線の共形不変な長さを定義した．これは本質的に円 S の射影構造の分類と密接な関係にある．山辺の共形不変量との関係もありこの方面は今後さらに研究を進める．

研究成果の概要（英文）：In conformal geometric aspect, I gave a new interpretation of regular homotopy invariants of closed curves in terms of differential geometry. This will a first step of developing differential geometry of regular homotopy theory by S. Smale.
In projective geometric aspect, I defined a conformal invariant length of a closed curve in a Riemannian manifold. This definition relies essentially on the classification of projective structures of the circle. I have also an observation that this projective classification is relevant to Yamabe's conformal invariant.

研究分野：微分幾何学

キーワード：共形構造　射影構造　リーマン幾何学　正則ホモトピー　シュワルツ微分

１．研究開始当初の背景

（１）伝統的な計量構造の幾何学は今なお幾何学分野において中心的な位置を占める．古典幾何学のアナロジーから，多様体上の射影微分幾何学，共形微分幾何学の発展が望まれる．共形微分幾何の発展に比較して，射影微分幾何学の，特に内在的かつ大域的な研究はまだ十分とは言えないように思われる．

（２）研究代表者が 1980 年代に導入した山辺不変量は共形微分幾何の話題として，現在でも多くの幾何学者から興味を持たれ，深い研究成果が発表されている．しかしいまだに 1980 年代に提示した問題で未解明のものがある．

（３）射影微分幾何に関しては，低次元，すなわち 1 次元，2 次元，3 次元においてそれぞれの次元に固有の理論が求められる．1 次元の場合，2000 年の和田昌昭氏との共同研究で得られたリーマン多様体上の曲線のシュワルツ微分はさらなる発展が見込まれる．

２．研究の目的

（１）山辺不変量 $Y(S^2 \times S^2)$ の決定問題．ほかにも未解明の空間があるが球面の直積での値の決定が，この方面の研究にとって象徴的な問題となっている．

（２）閉曲線の正則ホモトピー不変量の共形微分幾何学による記述．この研究課題の開始前に結果を得たが証明に誤りがあったため，それを修復する．これを最初のステップとして一般の正則ホモトピー理論を微分幾何学の言葉で書き直し，より精密な研究につなげたい．

（３）射影微分幾何の基盤となるアフィン接続に関する諸問題を解決する．

（４）１（３）に述べたシュワルツ微分は曲線の単射性定理への応用がある．この考察を見直すとユークリッド球面の特徴付け，いわゆる球面定理の新しい結果が期待できる．この目標に向かう考察を深める．

３．研究の方法

（１）関係する研究集会に参加あるいはその企画運営に参画する．優れた研究者と討論する機会をもち，最新の研究動向を知ることを目的とする．

（２）研究に必要な図書を校費で購入することは雑誌代の負担が重くなっている現在むつかしい．そのため関連分野の図書の購入に研究費をあてる．また事実上，研究活動に不可欠となっているコンピューター環境の維持，更新をする．

４．研究成果

（１）リーマン多様体のレヴィ・チヴィタ接続とクリフォード代数を用いることにより，適切な曲率による補正を行って正則曲線のシュワルツ微分が定義される．シュワルツ微分の一般化はさまざまな研究者によるものがあるが，和田昌昭氏との共同研究で得られた，この曲線のシュワルツ微分は独自のものでさらなる発展が見込まれる．中でも，リーマン多様体の共形構造から曲線の射影構造を定義することができることは注目している点で，このときの射影展開写像が単射（内在的な条件）であれば，考えている曲線は自己交点を持たない（外在的な条件）ことをユークリッド球面においてすでに示している．発表当時はあまり注目されなかったようであるが，2009 年に M.Chuaqui が同じアイデアを再発見するなど再評価へ向かう可能性もある．そのためには発案者自らこの研究を推し進める必要がある．今後の方向性としていくつかの可能性があるが，そのひとつとして，この単射性定理が成立するのはユークリッド球面に限られるのではないかという問題がある．本研究によって実際，コンパクト階数１対称空間で単射性定理が成立するのは球面に限ることを示した．コンパクト階数１対称空間では測地線の状況が正確に把握できるのが証明の鍵となっている．この結果は若干の一般化が可能であるがまだ不十分である．しかしこのような対称空間に限らずおそらく一般に単射性定理による球面の特徴付けができることの確信を得たため予想として問題の提示をした．

（２）閉曲面の共形ラプラシアンのグリーン関数を用いて計量を共形変形すると特異点を持つ平坦曲面が得られる．オイラー数が正の場合この特異点は無限遠となり，この観察をもとに一意化定理（定曲率化可能定理）の簡明な新しい証明を与えることができる．オイラー数が非正（特に負）の場合は無限遠ではなく錐状孤立特異点をもつ平坦曲面が得られる．ユークリッド平面幾何の時と同様に，この特異点付き曲面上の正則閉曲線の曲率積分を考えると，２πの整数倍ではなく，グリーン関数の極を変化させると連続にすることが分かる．この現象は以前より不思議に思われた．というのはこの曲率積分は適切な解釈のもとで正則ホモトピー不変性をもち，正則ホモトピー類は連続的ではなく離散的なものであるので，それが微分幾何的に連続量で現れるのは何かしらの理由があるはずで，それを解明する結果を得た．まず整数部分の抽出は曲面の整係数ホモロジーの整制限を指定することにより得られ，これが基本的な正則ホモトピー不変量となる．非整数部分はグリーン関数の極を変化させることにより生ずるが，非斉次ラプラシアンのグリーン関数を考えているので，グリーン関数の極に関する依存関係は連続性すら望めない．ここが証明の技術的ポイントで，グリーン関数

の不定性を利用して適切に正規化することにより，この依存関係を微分可能にできることを示した．こうして極を変数とする関数がオイラー数２π倍を法とする実数値調和関数として得られ，これはすなわち調和１形式を表すのでコホモロジーの元を定めるが，これが初めに与えた閉曲線のポアンカレ双対であることが分かった．こうして共形幾何学的に正則ホモトピー不変量の表示が得られたが，まだ完全ではない．1996 年の共同研究で得た *t* 不変量と呼ばれる正則ホモトピー不変量の微分幾何学的表示が問題として残っている．とは言え，曲線の正則ホモトピーについては一つの区切りになる結果であるので，次の段階として曲面，特に球面の正則ホモトピーの微分幾何の研究に向かいたい．

（３）ユークリッド空間の曲線 x に対してその消滅点（extinct point）の概念を導入した．点 p が x(t) の消滅点とは p を無限遠に移す反転γに対して γx の t での２階微分が０となることで定義する．x が正則曲線の時，消滅点曲線は一意的に存在しそれを x^ と書く．これはメビウス変換で同変で，x^^=x となる曲線としてベルヌーイ螺旋が特徴づけられる．ブライアントが 1980 年代にウィルモア双対性の議論で導入した曲面の conformal transform と類似性があり適切な一般化によりブライアントの議論を含む理論に発展させたい．

（４）ラゲール幾何学におけるラゲール球空間はn次元ユークリッド空間 R^nの有向超球の全体で半径０の球は点とみなす．ここにミンコフスキー計量を入れて考える．ここで半径０の球を除外し，ミンコフスキー計量を半径パラメーター r の２乗で割って正の定曲率ローレンツ空間が得られる．これは測地的に完備でないが，半径無限大のすなわち有向超平面を加えて完備空間Qが得られる．これはドジッター空間と等長的である．ユークリッド空間の正則曲線 x に対して x(t) と x^(t) を通り x(t) で x と直交し x の速度ベクトルで向き付けられる超球を S(t) と書く．こうして得られる球空間Qの曲線 S を x の L 変換と呼ぶことにする．古典幾何的構成であるが，これまで知られてなかったようである．L 変換の性質で基本的なものは x にメビウス変換を施すとL変換 SはQの等長変換で変わることにある．L 変換の逆変換は多少込み入るが，逆変換の存在の必要十分条件も与えた．

（５）ユークリッド空間の閉曲線 x の L 変換は適当な助変数変換により等速空間的閉曲線にすることができることを示した．この証明のためには円の射影構造の分類を本質的に用いる．L変換の等長不変量は x の共形不変量となるので，この等速空間的閉曲線の長さとして x の共形的長さを定義した．共形的長さは古くはフィアルコフなどによる定義があるが，ここでの定義はそれらと異なる．主結果はユークリッド空間の閉曲線の共形的長さはつねに２π以上であり，２πと等しくなるための必要十分条件は正円に限ることを示したことである．この考察は一見ユークリッド空間の曲線論に過ぎないように見えるが，一般のリーマン多様体上の閉曲線に一般化する方向性が見えていて，その方向での研究を今後の主要課題とする予定である．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

① 小林　治，幾何学的方法と解析学的方法，数理科学 628 (2015) 7-13，査読無

② Osamu Kobayashi，On conformal rotation number，Kodai math. J. 38 (2015)，166-171，査読有

③ 小林　治，多様体上の微積分，数理科学 614 (2014) 21-17，査読無

④ Osamu Kobayashi，Injectivity property of regular curves and a sphere theorem，Diff. geom. of submanifolds and its related topics 16-18，World Scientific 2013，査読有

〔学会発表〕（計９件）

①　小林　治，閉曲線の共形的長さと山辺の共形不変量，大阪市大微分幾何セミナー，2016 年 3 月 8 日，大阪府

②　小林　治，直線の射影構造と共形的長さ，阪大幾何セミナー，2016 年 1 月 25 日，大阪府

③　Osamu Kobayashi，Conformal length through Laguerre geometry，Geometric Analysis in Geometry and Topology，2015 年 11 月 10 日，東京都

④　小林　治，閉曲線の正則ホモトピーと共形ラプラシアン，大阪市大微分幾何セミナー，2014 年 12 月 10 日，大阪府

⑤　小林　治，閉曲線の正則ホモトピーの共形幾何，阪大幾何セミナー，2014 年 6 月 23 日，大阪府

⑥　小林　治，共形的回転指数，東京工業大学大岡山談話会，2013 年 10 月 30 日，東京都

⑦　小林　治，4 次元の山辺不変量，大阪市

大微分幾何セミナー，2013 年 6 月 19 日，大阪府

⑧　小林　治，スカラー曲率に関する未解決と思われる問題について，阪大談話会，2012 年 10 月 15 日，大阪府

⑨　小林　治，アファイン接続のリッチ曲率について，阪大幾何セミナー，2012 年 7 月 23 日，大阪府

〔図書〕（計１件）
①　小林　治，芥川和雄，井関裕靖，山辺の問題，数学メモアール７(2013) 75pp．日本数学会，査読有

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
小林　治（KOBAYASHI，Osamu）
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：１０１５３５９５

(2)研究分担者
（　　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　　）

研究者番号：