

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 19 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540088

研究課題名(和文) 結び目の体積予想の研究

研究課題名(英文) On the volume conjecture for knots

研究代表者

横田 佳之 (Yokota, Yoshiyuki)

首都大学東京・理工学研究科・教授

研究者番号：40240197

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円

研究成果の概要(和文)：結び目の体積予想とは、結び目のジョーンズ多項式の極限に結び目補空間の体積が現れる、という予想で、ジョーンズ多項式に代表される量子不変量の幾何的背景の謎に迫る、重要な予想です。ジョーンズ多項式の積分表示に現れるポテンシャル関数の幾何的性質が証明の鍵となりますが、これまでの研究により、構造方程式、体積、チャーン・サイモンズ不変量が、ポテンシャル関数の臨界方程式、臨界値を与えることがわかっていました。この研究では、ポテンシャル関数のヘッセ行列式が、カusp・シェイプと呼ばれる結び目の不変量を与えることを示すと同時に、その一般化となる不変量の族を提唱し、ポテンシャル関数による公式を与えました。

研究成果の概要(英文)：Volume conjecture for knots states that, for a knot in 3-sphere, the volume of its complement appears in the limit of its Jones polynomial. This is very important conjecture because the geometric background of quantum invariants such as Jones polynomials is not clear yet. To prove this conjecture, we have to study the geometric property of the potential function which appears in the integral expression of the Jones polynomial of the knot. In fact, it is already known that the stationary phase equations and a critical value of the potential function give the structure equations and the complex volume of the knot.

In this research, we prove that the Hessian of the potential function gives the cusp shape, a geometric invariant of knots. Furthermore, we give a formula for the generalized cusp shape in terms of the potential function.

研究分野：位相幾何学

キーワード：結び目 ジョーンズ多項式 体積予想 ポテンシャル関数 カusp・シェイプ

1. 研究開始当初の背景

結び目の体積予想とは、補空間に双曲幾何の構造が入る結び目、いわゆる双曲結び目の双曲体積が、結び目のカシャエフ不変量の極限に現れるという予想で、1997年、ジュネーブ大学のカシャエフ氏により、提唱されました。

さらに、早稲田大学の村上順氏、東北大学の村上斉氏によって、カシャエフ不変量とジョーンズ多項式の等価性が示され、一般の結び目に対する、グロモフ体積バージョンに拡張されたことで、一気に注目を浴びることになりました。

その後、チャーン・サイモンズ不変量と呼ばれる、結び目の幾何的不変量を含む複素体積バージョン、結び目補空間の双曲構造の変形に対応したパラメータ付きバージョン、ライデマイスター・トーションと呼ばれる結び目の幾何的不変量を含む、高次バージョン等が提唱され、活発に研究されていました。

上記の経緯からも明らかですが、この予想は、ジョーンズ多項式を初めとする量子不変量、或は量子群の幾何的な背景に迫る、画期的な予想であり、プリンストン高等研究所のウィッテン氏や、カリフォルニア工科大学のグコフ氏を初めとする、理論物理学者の関心も集めています。

本研究の先行研究において、ジュネーブ大学のカシャエフ氏との共同研究により、量子二重対数関数を用いた、ジョーンズ多項式の積分表示を開発する一方で、積分表示に現れるポテンシャル関数の臨界方程式が、補空間の双曲構造方程式を与え、臨界値が双曲体積とチャーン・サイモンズ不変量を与えることを証明しました。

従って、体積予想を証明するために必要な作業は、結び目のジョーンズ多項式の積分表示から、極限値を正確に計算することと、ポテンシャル関数の臨界値と比較すること、になります。

この作業に関しても、本研究の先行研究において、ジュネーブ大学のカシャエフ氏、京都大学の大槻氏との共同研究により、6交点までの結び目に対して、結び目のジョーンズ多項式の積分表示に、鞍点法を適用することにより、極限値を正確に計算し、体積予想が成立することを確認しました。

さらに、上記の計算で求めた極限値に、結び目のチャーン・サイモンズ不変量、及びライデマイスター・トーションが現れることも確認しており、結び目の体積予想の複素体積バージョンと、高次バージョンに対するサポ

ーティング・エビデンスを得ていました。

2. 研究の目的

本研究の目的は、双曲結び目に対する体積を解決すること、及び、双曲結び目に対する体積予想の高次バージョンが示唆する、双曲結び目の幾何的不変量と、量子不変量、或は量子群との間の関係を解明することです。

双曲結び目に対する体積予想は、体積予想の全てのバージョンに関係する、基本的な問題であり、その解決は、結び目・3次元多様体の量子不変量の研究に、大きなインパクトを与えることが確実です。

また、ポアンカレ予想・幾何化予想が解決された後の、低次元トポロジーの研究における魅力的な研究テーマを、若手研究者や理論物理学者にアピールすることで、多くの新しい才能を、この研究分野に呼び込むことも繋がります。

具体的には、本研究の先行研究で明らかになった、結び目のジョーンズ多項式の積分表示の極限を求める際の、多変数の鞍点法に関する技術的な問題をクリアすることが、目標になります。結び目の積分表示の改良の可能性も視野に入れていきます。

双曲結び目に対する、体積予想の高次バージョンに関しては、双曲体積、チャーン・サイモンズ不変量、ライデマイスター・トーションに続く、重要な幾何的不変量の発見に繋がる可能性があります。

具体的には、結び目のジョーンズ多項式の積分表示に現れる、ポテンシャル関数の幾何的な性質を解析し、双曲結び目に対する体積予想の高次バージョンを精密化する作業を行います。

また、ポテンシャル関数と、ライデマイスター・トーション等、双曲結び目の重要な幾何的不変量の間を、結び目補空間の理想四面体分割や、結び目補空間の基本群の表現の観点からとらえ直し、結び目理論への応用を図ることも視野に入れます。とくに、結び目補空間の双曲構造の変形理論、結び目補空間から非双曲多様体を生み出す、例外的手術理論への応用を探ります。

3. 研究の方法

本研究の先行研究から、結び目のジョーンズ多項式の積分表示の極限を求める際の、多変数の鞍点法に関する技術的な問題に関しては、積分領域を主要部と非主要部に分割することを研究の出発点としました。

主要部は、結び目の図式の組み合わせ的な情報から決まる凸領域で、7交点以上の結び目に対して、主要部が空集合でないことを確認する作業から、研究を開始しました。非主要部に関しては、6交点以下の結び目の場合と同様に、被積分関数の絶対値を評価する方針で、研究を進めました。

また、結び目のジョーンズ多項式の積分表示に現れる、ポテンシャル関数の幾何的性質に関しては、本研究の先行研究で用いた、結び目補空間の双曲構造の変形に対応し、結び目のA多項式と呼ばれる不変量にも関係する、変形ポテンシャル関数に、改めて注目しました。

まず、ポテンシャル関数・変形ポテンシャル関数のヘッセ行列式に注目し、結び目補空間の理想四面体分割における、双曲幾何的データとの比較を行いました。また、結び目補空間の境界上にある、標準的緯線と呼ばれる単純閉曲線のホロノミー表現の固有値が、変形ポテンシャル関数の偏導関数、として与えられる事実から、変形ポテンシャル関数の高次偏導関数の解析を進めました。

4. 研究成果

結び目のジョーンズ多項式の、積分表示における積分領域の主要部に関しては、9交点以下の結び目に対しては、その存在が確認できましたが、一般の双曲結び目に対する主要部の存在証明には至りませんでした。双曲構造方程式の解の存在と絡め、データの再整理と、追加の実験が必要だと考えています。

結び目のジョーンズ多項式の、積分表示における積分領域の非主要部に関しては、ツイスト結び目と呼ばれる、双曲結び目の無限族に対して、ポアソン和公式を用いた積分表示から、留数定理を用いた積分表示に変更して、非主要部の被積分関数の絶対値による再評価を行いました。やはり積分領域の境界で、技術的な問題が発生することが分かりました。現在、境界のない積分領域への変形を模索中です。

結び目のジョーンズ多項式の、積分表示に現れるポテンシャル関数に関しては、結び目補空間の境界の形を表す、カusp・シェイプと呼ばれる幾何的不変量が、ポテンシャル関数のヘッセ行列式と、変形ポテンシャル関数のヘッセ行列式の、比として表されることを証明しました。

さらにその自然な一般化として、結び目の緯線のホロノミー表現の固有値の変化を捉える、高次カusp・シェイプの概念と、高次カusp多項式の概念を提唱し、ポテンシャル関数、及び、変形ポテンシャル関数の、高次

偏導関数を用いた行列式による計算方法を与えました。

高次カusp多項式全体の情報は、結び目の例外的手術や、非圧縮曲面の探求に有用なA多項式と同値であり、結び目理論における今後の応用が期待できます。

ポテンシャル関数とライデマイスター・トーシヨンの関係に関しては、不変量の計算に必要な、結び目補空間の基本群のホロノミー随伴表現を、ポテンシャル関数のパラメータを使って書き下すことに成功しました。

ただし、結び目補空間の理想四面体分割のスパンとホロノミー随伴表現から、定義に従ってライデマイスター・トーシヨンを計算する際に現れる行列式のサイズは、ポテンシャル関数のヘッセ行列式の3倍となり、その簡約化が今後の課題です。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計1件)

Yoshiyuki Yokota, On the cusp shape of hyperbolic knots, Oberwolfach Reports 9(2012), 47-50 (査読なし)

[学会発表](計3件)

Yoshiyuki Yokota, On the holonomy of longitudes of hyperbolic knots, Quantum Topology and Physics in Fukuoka, Kyushu University, 福岡県, September 7, 2014

横田佳之, 二重対数関数と結び目不変量, 代数学と計算, 首都大学東京, 東京都, 2013年12月17日

Yoshiyuki Yokota, On the cusp shape of hyperbolic knots, Low-Dimensional Topology and Number Theory, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, August 28, 2012

[図書](計0件)

[産業財産権]
出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.comp.tmu.ac.jp/~jojo>

6．研究組織

(1)研究代表者

横田 佳之 (YOKOTA YOSHIYUKI)
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号：40240197

(2)研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者

()

研究者番号：