2版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 30 年　 5 月 19 日現在

機関番号：２４４０３
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2012～2017
課題番号：２４５４００９１
研究課題名（和文）双対スティーンロッド代数の表現論の構築と応用

研究課題名（英文）A framework of representation theory of the Steenrod algebra

研究代表者
山口　睦（Yamaguchi, Atsushi）

大阪府立大学・高等教育推進機構・教授

研究者番号：８０１８２４２６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：位相群関手の表現論を定式化するために，ファイバー圏に関する基礎的研究に取り組み，以下の成果を得て，群対象の表現論についての基礎的な枠組みの構築を行った．
直積の概念をファイバー圏に拡張した"fibered category with products"の概念と，写像空間の概念をファイバー圏に拡張した"fibered category with exponents"の概念を定義して，これらのファイバー圏の基本的な性質を調べ，群対象の表現論を展開するために 必要な基礎理論を構築した．さらにファイバー圏の底カテゴリーの群対象の間の射と，そのターゲットである群対象の表現に対して，誘導表現を構成した．

研究成果の概要（英文）：We formulate the notion of representation of group objects in terms of fibered category and introduce a notion called “cartesian closed fibered category” which generalizes the notion of cartesian closed category in terms of fibered category. We develop a fundamental theory of representation of group objects under the framework of this category. We develop a general theory on categories enriched by topological spaces, namely, categories with each set of morphisms between two objects has a topology.

研究分野：代数的位相幾何学

キーワード：表現論　ファイバー圏　スティーンロッド代数

1．研究開始当初の背景

(1) 複素コボルディズム論や BP-理論などの一般ホモロジー論にはホップ・アルジェブロイドと呼ばれるホップ代数を一般化した対象が付随し，ホップ・アルジェブロイド上のコモジュールの圏に値をとる関手である．そこで，ホップ・アルジェブロイドによって表現される，次数付き可換環の圏から集合の圏への関手を考えると，この関手は亜群の圏を値にとる関手であると考えられる．引用文献②で，ファイバー圏の概念を用いることによって，一般の圏における亜群の表現の概念の定式化を行い，同時に圏論的な側面から亜群の表現論の基礎付けを行ったが，そこで行った定式化の下では，ホップ・アルジェブロイド上のコモジュールはホップ・アルジェブロイドが表現する亜群の圏を値にとる関手の表現になっている．このことから，一般 (コ) ホモロジー論を「亜群の表現論」という立場から見直すことによって，複素コボルディズム論や BP-理論のにおける諸結果について，新しい理解の仕方を獲得することは，極めて有意義なことであると考えられる．

しかしながら ②では「亜群の表現論」の基礎付けを行っただけで，一般ホモロジー論の研究に役立つ，より具体的な理論の構築には至らなかったため，研究の対象を一般のホップ・アルジェブロイドではなく，ホップ代数が付随する常（コ）ホモロジー論に絞り，まず常（コ）ホモロジー論を「群の表現論」の立場から見直すことにした．この場合，すでに確立された研究分野である群スキームの表現論を手本にながら，位相幾何学の研究に「最適化」した表現論を構築でき，その後，より一般の「亜群の表現論」のあるべき姿について考察するという道筋をとることにした．

すなわち「亜群の表現論」は，その構築から始めなければならない上に，そもそもそのあるべき姿の見通しすら立たないため，すでに確立した「群の表現論」をお手本にできる常（コ）ホモロジー論に研究対象を絞ったというのが，本研究の背景と動機のひとつである．

(2) 標数 p の素体 $\boldsymbol{F}_p$ を係数とする常コホモロジー論のコホモロジー作用素のなす環はスティーンロッド代数と呼ばれる非可換環であり，以後，スティーンロッド代数を $\mathcal{A}_p^*$ で表すことにすれば，$\boldsymbol{F}_p$ を係数とする常コホモロジー群 $\mathcal{A}_p^*$ 上の次数付き加群である．$\mathcal{A}_p^*$ は代数的位相幾何学において，空間のホモトピー群の決定をはじめ，種々の空間の性質の研究に応用されてきたが，特に 1980 年代後半，Lannes らにより $\mathcal{A}_p^*$ 上の非安定加群の理論が構築され，Sullivan 予想の解決など多大な成果が上がって，$\mathcal{A}_p^*$ の有用性が再認識された．$\mathcal{A}_p^*$ 上の非安定加群の理論は 1980 年代後半から 1990 年代始めにかけて研究が盛んに行われていたが，現在は専ら，それらの研究の成果が幾何学的な種々の問題の解決に利用されることが多く，非安定加群そのものの理論的研究はあまり行われていない．また，$\mathcal{A}_p^*$ は非可換環であるという性質上，従来の研究手法では応用できる代数学の分野は限られたものであった．

そこで，以下に述べる考察によって，$\boldsymbol{F}_p$ を係数とする常コホモロジー群などの左 $\mathcal{A}_p^*$-加群を群スキームの表現と考えることができる．$\mathcal{A}_p^*$ はホップ代数の構造を持ち，その双対である双対スティーンロッド代数 $\mathcal{A}_{p*}$ は可換なホップ代数であるため，$\mathcal{A}_{p*}$ によって表現される群スキーム $G_{\mathcal{A}_{p*}}$ が定義される．ここで，次数付き可換 $\boldsymbol{F}_p$-代数 R^* に対して，$G_{\mathcal{A}_{p*}}(R^*)$ は加法的形式群の，$R^*[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$-係数の自己同型群になる (③の Appendix 参照) ため，R^* が次数付き可換な位相 $\boldsymbol{F}_p$-代数ならば $G_{\mathcal{A}_{p*}}(R^*)$ には一変数形式的冪級数環の部分空間としての位相が入り，$G_{\mathcal{A}_{p*}}$ は次数付き位相 $\boldsymbol{F}_p$-代数の圏から位相群への関手とみなせる．このように，可換なホップ代数によって表現され，位相群の圏に値を関手を，「位相アファイン群スキーム」と呼ぶことにする．一方，左 $\mathcal{A}_p^*$-加群 M^* と $\mathcal{A}_{p*}$ に適切な位相を与えれば，M^* の左 $\mathcal{A}_p^*$-加群の構造から "Milnor coaction"(①の第 4 節参照）と呼ばれる，M^* の右 $\mathcal{A}_{p*}$-余加群の構造 $\varphi : M^* \to M^* \widehat{\otimes} \mathcal{A}_{p*}$ が定義される．さらに，次数付き位相 $\boldsymbol{F}_p$-代数 R^* に対して位相加群 $M^* \widehat{\otimes} R^*$ を対応させる関手を F_{M^*} で表せば φ から $G_{\mathcal{A}_{p*}}$ の F_{M^*} への左作用 $\alpha : G_{\mathcal{A}_{p*}} \times F_{M^*} \to F_{M^*}$ が定義され，この自然変換 α を $G_{\mathcal{A}_{p*}}$ の M^* 上の表現と考える．

このように，左 $\mathcal{A}_p^*$-加群を $\mathcal{A}_{p*}$ で表現される位相群スキームの表現と考えることによって，$\mathcal{A}_p^*$ 上の非安定加群の理論を位相群スキームの表現論として再構築しながら，位相幾何学の研究に役立つ表現論が展開できると考えたことが本研究の出発点となる着想であり，同時にその背景と動機でもある．

2．研究の目的

本研究の目的は，非可換環である $\mathcal{A}_p^*$ などの次数付き余可換ホップ代数上の次数付き加群の性質や，それらのなす圏の研究に，群の表現論の手法を適用する仕組みを構築することである．

3．研究の方法

まず，前述の本研究の出発点となる着想について，以下で数学的にもう少し詳しく述べる．

可換環 K と次数付き K-加群 M^*, N^* に対し, M^* から N^* への次数を保つ K-加群の準同形写像全体からなる K-加群を $\mathrm{Hom}_K(M^*, N^*)$ で表す．また, 次数を n だけ上げる次数付き K-加群全体の準同形写像全体からなる K-加

群を $\mathcal{H}om^n(M^*, N^*)$ とするとき，$\mathcal{H}om^n(M^*, N^*)$ を次数 n の K 加群とする次数付き K 加群を $\mathcal{H}om^*(M^*, N^*)$ で表す．上記の記号の下で，体 K 上の次数付き有限型余可換ホップ代数 A^* と次数付き有限型 A^*-加群 V^* に対し, 自然な単射

$\Phi : \mathrm{Hom}_K(A^* \otimes_K V^*, V^*) \to \mathrm{Hom}_K(V^*, \mathcal{H}om^*(A^*, V^*))$

が定義され，A_* を A^* の双対ホップ代数とするとき, A_* と V^* に適切な位相を定めておけば，自然な同型写像 $\varphi : V^* \widehat{\otimes}_K A_* \to \mathcal{H}om^*(A^*, V^*)$ が存在する．写像

$\Lambda : \mathrm{Hom}_K(A^* \otimes_K V^*, V^*) \to \mathrm{Hom}_K(V^*, V^* \widehat{\otimes}_K A^*)$

を $\Lambda(\alpha) = \varphi^{-1}\Phi(\alpha)$ で定義するとき, α が V^* の左 A^*-加群としての構造射ならば，$\Lambda(\alpha) : V^* \to V^* \widehat{\otimes}_K A^*$ は完備次数付き K-加群の圏における V^* の右 A_*-余加群の構造射であることが示される．実際，本研究において，適切な条件の下で，この対応 Λ により，左 A^*-加群のなす圏と右 A_*-余加群のなす圏が同型であることを示した．

一方，右 A_*-余加群の構造射 $\xi : V^* \to V^* \widehat{\otimes}_K A_*$ が与えられたとき，A_* によって表現されるアファイン群スキームを G_{A_*} で表し, 完備可換 K-代数 R^* に対して $V^* \widehat{\otimes}_K R^*$ を対応させる関手を F_{V^*} で表せば，アファインスキームの圏における群対象 G_{A_*} の F_{V^*} への左作用 $\hat{\xi} : G_{A_*} \times F_{V^*} \to F_{V^*}$ が次のように定義される．可換 K-代数 R^* に対して $\hat{\mu}_{R^*} : R^* \widehat{\otimes}_K R^* \to R^*$ を R^* の積から誘導される写像とするとき，$(g, x) \in G_{A_*}(R^*) \times F_{V^*}(R^*)$ を合成写像

$$V^* \widehat{\otimes}_K R^* \xrightarrow{\xi \,\widehat{\otimes}\, id_{R^*}} V^* \widehat{\otimes}_K A_* \widehat{\otimes}_K R^* \xrightarrow{id_{V^*} \widehat{\otimes}\, g \,\widehat{\otimes}\, id_{R^*}} V^* \widehat{\otimes}_K R^* \widehat{\otimes}_K R^* \xrightarrow{id_{V^*} \widehat{\otimes}\, \hat{\mu}_{R^*}} V^* \widehat{\otimes}_K R^*$$

による x の像に対応させることによって，写像 $\hat{\xi}_{R^*} : G_{A_*}(R^*) \times F_{V^*}(R^*) \to F_{V^*}(R^*)$ を定義する．従って，右 A_*-余加群の構造射 ξ に対して G_{A_*} の F_{V^*} への左作用 $\hat{\xi}$ が定まるが，逆に G_{A_*} の F_{V^*} への左作用 γ に対して $v \in V^*$ を $\gamma_{A_*}(id_{A_*}, v \widehat{\otimes} 1) \in F(A_*) = V^* \widehat{\otimes}_K A_*$ 対応させるさせることによって，V^* の右 A_*-余加群としての構造射 $\tilde{\gamma}$ が定まる．G_{A_*} の F_{V^*} への左作用を G_{A_*} の V^* 上の表現と呼ぶことにすれば，この対応によって，右 A_*-余加群のなす圏は，G_{A_*} の表現の圏と同型であるため，左 A^*-加群のなす圏は G_{A_*} の表現の圏と同型になることが分かる．このことから，左 A^*-加群およびそれらのなす圏の研究は，G_{A_*} の表現およびそれらのなす圏の研究の圏に帰着され，後者の研究には表現論の手法が導入できることになる．

上記の着想から，次数付き余可換ホップ代数で表現される群スキームの表現論の枠組みを構築するために以下の研究課題について考察と，理論の構築を行った．

(1) 次数付き線形位相環と次数付き線形位相加群
(2) 次数付き位相加群のテンソル積
(3) 準同形写像のなす次数付き位相加群の構成
(4) テンソル積と準同形写像のなす位相加群との関係
(5) 次数付き位相加群の圏における代数と余代数
(6) Cartesian closed category における群作用
(7) ファイバー圏に関する研究
(8) 有限積をもつ圏における群対象の表現論
(9) 擬位相圏に関する理論
(10) 位相アファインスキーム
(11) 位相アファイン群スキーム
(12) 加群のファイバー圏

(1) から (5) で次数付き位相環・位相加群に関して，表現論に必要な結果を蓄積した．さらに位相環の圏や位相加群の圏を統一的に扱うための概念として (9) の擬位相圏を定義し，(9)，(10) の課題に応用した．また，(7)，(8)，(12) ではファイバー圏の概念を用いて表現論の基礎付けを行った．次項で，上記の各研究テーマに関する成果について解説する．

４．研究成果

(1) 次数付き線形位相環と次数付き線形位相加群：

次数付き線形位相環と次数付き線形位相加群に関する，懸垂関手，完備化などの基本的概念の (再) 定義と線形位相加群の圏の性質について考察し，線形位相加群の圏が完備かつ余完備であることを示し，線形位相加群の圏は正則圏であること示した．また，次数付き環と次数付き加群に与える位相として “cofinite topology”，“skeletal topology” と呼ばれる 2 種類の標準的な位相を定義した．前者は次数の構造には依存しないので，次数付きでない環や加群でも同様に定義されるが，後者は次数の構造に依存する．次数付き環・加群が有限型である場合は，これらの 2 つの位相は一致する．

(2) 次数付き位相加群のテンソル積：

次数付き位相加群のテンソル積の性質とその位相について考察し，次数付き位相環 K^* 上の次数付き位相加群 M^*, N^* がともに cofinite topology より弱い位相を持つならば, これらの K^* 上のテンソル積 $M^* \otimes_{K^*} N^*$ も cofinite topology より弱い位相を持つなどの基礎的な結果を導いた．また，完備テンソル積についても考察し，skeletal topology を持つ次数付き位相加群の完備テンソル積が，ある条件の下で加群の直積として表示されることを示した．

(3) 準同形写像のなす次数付き位相加群の構成：

K^* を次数付き位相環とするとき, 次数付き位相 K^*-加群 M^*, N^* と整数 n に対し，M^* に n 重懸垂関手を施して得られる次数付き位相 K^*-加群 $\Sigma^n M^*$ から N^* への次

数を保つ次数付き位相 K^*-加群の準同形写像全体からなるアーベル群を $\mathcal{H}om^n(M^*,N^*)$ で表し, $\mathcal{H}om^n(M^*,N^*)$ を次数 n の K 加群とする次数付き K 加群を $\mathcal{H}om^*(M^*,N^*)$ で表すとき, $\mathcal{H}om^*(M^*,N^*)$ に適切な位相を定義することによって $\mathcal{H}om^*(M^*,N^*)$ を次数付き位相 K^*-加群の構造をを与えた．さらに L^* を次数付き位相 K^*-加群とするとき，自然な単射

$\Phi:\mathrm{Hom}(L^*\otimes_{K^*}M^*,N^*)\to\mathrm{Hom}_{K^*}(L^*,\mathcal{H}om^*(M^*,N^*))$

が定義されるが，この単射 Φ の性質を調べ，Φ が次数付き位相 K^*-加群同型写像になるための十分条件を与えた．また，$\mathcal{H}om^*(M^*,N^*)$ の完備化 $\mathcal{H}om^*(M^*,N^*)^\wedge$ について考察して，N^* の完備化を $\widehat{N}^*$ で表すとき，$\mathcal{H}om^*(M^*,N^*)^\wedge$が $\mathcal{H}om^*(M^*,\widehat{N}^*)$ と同型になるための十分条件を与えた．

(4) テンソル積と準同形写像のなす位相加群との関係：

次数付き位相 K^*-加群 M_1^*, M_2^*, N_1^*, N_2^* に対し，自然な次数付き位相加群の準同形写像

$$\phi:\mathcal{H}om^*(M_1^*,N_1^*)\otimes_{K^*}\mathcal{H}om^*(M_2^*,N_2^*)\longrightarrow \mathcal{H}om^*(M_1^*\otimes_{K^*}M_2^*,N_1^*\otimes_{K^*}N_2^*)$$

を定義して，この写像の性質を調べ，次の ϕ の完備化が同型写像になるための十分条件を与えた．

$$\hat{\phi}:\mathcal{H}om^*(M_1^*,N_1^*)\,\widehat{\otimes}_{K^*}\mathcal{H}om^*(M_2^*,N_2^*)\longrightarrow \mathcal{H}om^*(M_1^*\otimes_{K^*}M_2^*,N_1^*\otimes_{K^*}N_2^*)^\wedge$$

この結果と前述の結果から，ϕ から誘導される写像

$$\tilde{\phi}:\mathcal{H}om^*(M_1^*,N_1^*)\,\widehat{\otimes}_{K^*}\mathcal{H}om^*(M_2^*,N_2^*)\longrightarrow \mathcal{H}om^*(M_1^*\,\widehat{\otimes}_{K^*}M_2^*,N_1^*\,\widehat{\otimes}_{K^*}N_2^*)$$

が同型になるための十分条件が得られる．とくに $M_1^*=M^*$, $N_1^*=M_2^*=K^*$, $N_2^*=N^*$ の場合，M^* の双対加群 $\mathcal{H}om^*(M^*,K^*)$ を M^{**} で表せば, $\hat{\phi}$ から自然な写像 $\hat{\varphi}^{M^*}_{N^*}:M^{**}\,\widehat{\otimes}_{K^*}N^*\to\mathcal{H}om^*(M^*,N^*)^\wedge$が定義されるが，この写像が同型写像になるための十分条件が得られる．

また, 次数付き位相 K^*-加群 L^* に対して $\hat{\varphi}^{L^*}_{M^*}$ が同型写像ならば，この逆写像と前述の写像 Φ を用いて 写像

$\Lambda:\mathrm{Hom}_{K^*}(L^*\otimes_{K^*}M^*,N^*)\to\mathrm{Hom}_{K^*}(M^*,N^*\,\widehat{\otimes}_{K^*}L^{**})$

を定義し，この写像が同型写像になるための十分条件を求めるとともに，その性質を調べた．

(5) 次数付き位相加群の圏における代数と余代数：

次数付き位相加群の圏における代数と余代数の概念とその双対性について考察し，次数付き位相 K^* 代数 A^* の双対加群 A^{**} が余代数になるための十分条件を与えた．また，適切な条件の下で，次数付き位相 K^* 加群の準同形写像 $\alpha:A^*\otimes_{K^*}M^*\to M^*$ に対して，α が M^* の左 A^*-加群の構造射であることと，

$\Lambda:\mathrm{Hom}_{K^*}(A^*\otimes_{K^*}M^*,A^*)\to\mathrm{Hom}_{K^*}(M^*,M^*\,\widehat{\otimes}_{K^*}A^{**})$

による α の像 $\Lambda(\alpha):M^*\to M^*\,\widehat{\otimes}_{K^*}A^{**}$ が M^* の右 A^*-余加群の構造射であることが同値になることを示した．この事実から，適切な条件の下で，左 A^*-加群のなす圏と右 A_*-余加群のなす圏が同型になることが導かれる．さらに, M^* の左 A^*-加群の構造射 α に対し，$\Lambda(\alpha)$ は J.Milnor が論文①で定義した，“Milnor coaction”と呼ばれる準同形写像に一致することを示した．

(6) Cartesian closed category における群作用：

$\mathcal{E}$ を有限極限をもつ cartesian closed category，G を $\mathcal{E}$ における群対象とする．圏 $\mathcal{E}$ における群の作用に対しても，$\mathcal{E}$ が集合の圏の場合と同様に，安定化群，正規化群，中心化群などが定義されることを示し，それらの性質について基本的な命題が成り立つことを検証した．$\mathrm{Act}_r(G)$ によって，G の右作用を持つ $\mathcal{E}$ の対象全体からなる圏を表す．このとき，$\mathcal{E}$ の群対象の間の射 $f:H\to G$ に対し，$\mathrm{Act}_r(G)$ の対象 (X,α) に対して, X への G の右作用 α を f によって引き戻した X への H の右作用 $\alpha(id_X\times f)$ が定まり，(X,α) を $(X,\alpha(id_X\times f))$ に対応させることによって関手 $f^*:\mathrm{Act}_r(G)\to\mathrm{Act}_r(H)$ が定義されるが, $\mathcal{E}$ が有限極限をもつ cartesian closed category であるという仮定から，f^* の右随伴関手を構成した．この結果は, 後述のファイバー圏の概念を用いた群対象の表現に関する，より一般的な結果を導く契機となった．

(7) ファイバー圏に関する研究：

$\mathcal{E}$ を有限積をもつ圏とするとき, $\mathcal{E}$ の対象 X に対し，X から $\mathcal{E}$ の終対象 1 への唯一の射を o_X で表す．$p:\mathcal{F}\to\mathcal{E}$ を $\mathcal{E}$ 上のファイバー圏とする．$\mathcal{E}$ の対象 X と終対象上のファイバー $\mathcal{F}_1$ の対象 N に対し，$\mathcal{F}_1$ から集合の圏 $\mathcal{S}et$ への共変関手 $F_{X,N}:\mathcal{F}_1\to\mathcal{S}et$ と反変関手 $F^X_N:\mathcal{F}_1^{op}\to\mathcal{S}et$ をそれぞれ $F_{X,N}(M)=\mathcal{F}_X(o_X^*(N),o_X^*(M))$, $F^X_N(M)=\mathcal{F}_X(o_X^*(M),o_X^*(N))$ によって定義する．$\mathcal{E}$ のすべての対象 X と $\mathcal{F}_1$ のすべての対象 N に対して $F_{X,N}$ が表現可能であるとき，ファイバー圏 $p:\mathcal{F}\to\mathcal{E}$ を “fibered category with products”と呼び，関手 $F_{X,N}$ を表現する $\mathcal{F}_1$ の対象を $X\times N$ で表す．また，$\mathcal{E}$ のすべての対象 X と $\mathcal{F}_1$ のすべての対象 N に対して F^X_N が表現可能であるとき，ファイバー圏 $p:\mathcal{F}\to\mathcal{E}$ を “fibered category with exponents”と呼び，関手 F^X_N を表現する $\mathcal{F}_1$ の対象を N^X で表す．そこで，“fibered category with products” と “fibered category with exponents”について研究を行い，さらにこれら両方の条件を満たし，ある種の結合律を満たすファイバー圏を “cartesian closed fibered category”と呼び，cartesian closed category の概念をファイバー圏に拡張した．前者のファイバー圏では (X,N) を $X\times N$ に対応させる $\mathcal{E}\times\mathcal{F}_1$ から $\mathcal{F}_1$ への関手，後者のファイバー圏では (X,N) を N^X に対応させる $\mathcal{E}^{op}\times\mathcal{F}_1$

から $\mathcal{F}_1$ への関手が定義でき，これらの関手について基礎的な性質を導き，これらのファイバー圏で表現論を展開するための準備を行った．

(8) 有限積をもつ圏における群対象の表現論：

$\mathcal{E}$ を有限積をもつ圏，$p:\mathcal{F}\to\mathcal{E}$ を $\mathcal{E}$ 上のファイバー圏とする．$(G,\mu:G\times G\to G,\varepsilon:1\to G)$ を $\mathcal{E}$ の群対象とするとき，$\mathcal{F}_1$ の対象 M に対し，G の M 上の表現とは M と $\mathcal{F}_G$ の射 $\xi:o_G^*(M)\to o_G^*(M)$ の対 (M,ξ) で，ξ が結合律 ($\mathrm{pr}_i:G\times G\to G$ を第 i 成分への射影とするとき，$\mu^*(\xi)$ と $\mathrm{pr}_1(\xi)$, $\mathrm{pr}_2(\xi)$ の間の関係式) と単位元の自明な作用 ($\varepsilon^*(\xi)$ と M の恒等射の間の関係式) に相当する等式を満たすものとして定義される．とくに，$o_G^*(M)$ の恒等射は G の表現で，G の M 上の自明な表現と呼ぶ．また，群対象の射 $f:H\to G$ と G の表現 (M,ξ) に対して f による引き戻しと呼ばれる H の M 上の表現 $f^\bullet(M,\xi)$ が，H の射 $f^*(\xi):f^*o_G^*(M)\to f^*o_G^*(M)$ から定義され，G の表現の圏 $\mathrm{Rep}(G)$ から H の表現の圏 $\mathrm{Rep}(H)$ への関手 $f^\bullet$ が得られる．

$p:\mathcal{F}\to\mathcal{E}$ が “fibered category with products”であるとき，ξ を与えることと $\mathcal{F}_1$ の射 $\hat{\xi}:G\times M\to M$ を与えることと同値であり，ξ が M 上の表現の構造射であることと，$\hat{\xi}$ が M への G の左作用と同様の等式を満たすことと同値であることに着目して，G の左正則表現 (表現を忘却する関手の左随伴関手) を構成した．さらに $\mathcal{E}$ が coequalizer をもつ圏の場合に，G の軌道対象 (自明な表現を対応させる関手の左随伴関手) と，群対象の射 $f:H\to G$ に対して $f^\bullet$ の左随伴関手を構成した．$p:\mathcal{F}\to\mathcal{E}$ が “fibered category with exponents”であるときは，上と同様の考察から，G の右正則表現 (表現を忘却する関手の右随伴関手) を構成し，さらに $\mathcal{E}$ が equalizer をもつ圏の場合に，G の不動部分対象 (自明な表現を対応させる関手の右随伴関手) と，群対象の射 $f:H\to G$ に対して $f^\bullet$ の右随伴関手を構成した．

(9) 擬位相圏に関する理論：

圏 $\mathcal{E}$ が条件「任意の $\mathcal{E}$ の対象 R,S に対して R から S への射全体の集合 $\mathcal{E}(R,S)$ に位相が定義されている.」と「$\mathcal{E}$ の任意の射 $f:R\to S$ と対象 T に対して f が誘導する写像 $f_*:\mathcal{E}(T,R)\to\mathcal{E}(T,S)$ と $f^*:\mathcal{E}(S,T)\to\mathcal{E}(R,T)$ は連続写像である.」を満たすとき，$\mathcal{E}$ を擬位相圏と呼ぶことにする．$\mathcal{T}op$ を位相空間と連続写像からなる圏するとき，位相空間 X,Y に対し，X から Y への連続写像の集合 $\mathcal{T}op(X,Y)$ に点収束位相を与えることによって，$\mathcal{T}op$ は擬位相圏になる．$\mathcal{E},\mathcal{T}$ を擬位相圏とするとき，$\mathcal{E}$ から $\mathcal{T}$ への関手 F が条件「任意の $\mathcal{E}$ の対象 R,S に対して，F が定める写像 $\mathcal{E}(R,S)\to\mathcal{T}(F(R),F(S))$ は連続である.」を満たすとき，F を連続関手という．さらに, $\mathcal{E}$ から $\mathcal{T}$ への連続関手とその間の自然変換からなる圏を $\mathrm{Funct}_c(\mathcal{E},\mathcal{T})$ で表すとき，$\mathrm{Funct}_c(\mathcal{E},\mathcal{T})$ の対象 F,G に対し，F から G への自然変換全体からなる集合 $\mathrm{Funct}_c(\mathcal{E},\mathcal{T})(F,G)$ には $\mathcal{T}$ の擬位相圏の構造を用いて位相を定義することによって，$\mathrm{Funct}_c(\mathcal{E},\mathcal{T})$ も擬位相圏になることを示した．また，R を擬位相圏 $\mathcal{E}$ の対象とするとき，$\mathcal{E}$ の対象 S を位相空間 $\mathcal{E}(R,S)$ に対応させる $\mathcal{E}$ から $\mathcal{T}op$ への関手を h_R で表し，これを R で表現される関手，このような形の関手と自然同値である関手を表現可能関手と呼ぶ．このとき，表現可能関手は連続関手であることが示され，連続関手 $F:\mathcal{E}\to\mathcal{T}op$ と $\mathcal{E}$ の対象 R に対して $\mathrm{Funct}_c(\mathcal{E},\mathcal{T}op)(h_R,F)$ から $F(R)$ への自然な同相写像が存在するという,「米田の補題」を示した．

表現可能関手の余極限で表される関手全体からなる $\mathrm{Funct}_c(\mathcal{E},\mathcal{T}op)$ の充満部分圏を $\mathrm{Funct}_r(\mathcal{E},\mathcal{T}op)$ で表すとき，R を h_R に対応させることによって $\mathcal{E}$ の双対圏を $\mathrm{Funct}_r(\mathcal{E},\mathcal{T}op)$ の充満部分圏として埋め込むことができるが，適切な条件の下で，この埋め込みの関手 (米田埋め込み) が左随伴関手をもつことを示した．また，$\mathrm{Funct}_r(\mathcal{E},\mathcal{T}op)$ は有限積をもつ圏であるであることを示し，さらにこの圏が cartesian closed であることを示した．

(10) 位相アファインスキーム：

次数付き線形位相 K^*-代数の圏を $\mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*}$，次数付き線形位相 K^*-加群の圏を $\mathcal{T}op\mathcal{M}od_{K^*}$ で表す．A^*, B^* を $\mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*}$ の対象, M^*, N^* を $\mathcal{T}op\mathcal{M}od_{K^*}$ の対象とするとき，A^* から B^* への $\mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*}$ の射全体の集合 $\mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*}(A^*,B^*)$ と M^* から N^* への $\mathcal{T}op\mathcal{M}od_{K^*}$ の射全体の集合 $\mathrm{Hom}_{K^*}(M^*,N^*)$ に一様系を適切に定義することによって，$\mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*}(A^*,B^*)$ と $\mathrm{Hom}_{K^*}(M^*,N^*)$ に位相が定義される．これにより，$\mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*}$ と $\mathcal{T}op\mathcal{M}od_{K^*}$ に擬位相圏の構造を与えることができ，前述の結果を $\mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*}$ と $\mathcal{T}op\mathcal{M}od_{K^*}$ に適用することができる．

$\mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*}$ の対象 R^* に対し, R^* で表現される関手 $h_{R^*}:\mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*}\to\mathcal{T}op$ を位相アファインスキームという．$\mathcal{T}op\mathcal{M}od_{K^*}$ の対象 M^* に対し $F_{M^*}(A^*)=M^*\otimes_{K^*}A^*$, $\hat{F}_{M^*}(A^*)=M^*\,\widehat{\otimes}_{K^*}A^*$ で定義される関手 $F_{M^*},\hat{F}_{M^*}:\mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*}\to\mathcal{T}op\mathcal{M}od_{K^*}$ および M^* を M^* の完備化に対応させる関手 $\hat{}:\mathcal{T}op\mathcal{M}od_{K^*}\to\mathcal{T}op\mathcal{M}od_{K^*}$ はいずれも連続関手であることなど，擬位相圏 $\mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*}$ と $\mathcal{T}op\mathcal{M}od_{K^*}$ に関する基礎的な結果を示した．

(11) 位相アファイン群スキーム：

擬位相圏 $\mathcal{E}$ に対し，擬位相圏 $\mathrm{Funct}_r(\mathcal{E},\mathcal{T}op)$ における群対象を位相 $\mathcal{E}$-群関手と呼ぶ．$\mathrm{Funct}_r(\mathcal{E},\mathcal{T}op)$ は有限極限をもつ cartesian closed category であるので，上の

(6) で述べた結果が $\mathrm{Funct}_r(\mathcal{E}, \mathcal{T}op)$ における群対象に対して適用できる．従って $\mathrm{Funct}_r(\mathcal{E}, \mathcal{T}op)$ の群対象とその作用をもつ対象に関して，(6) で定義した安定化群，正規化群，中心化群．および群対象の間の射 $f : H \to G$ に対して関手 $f^\bullet : \mathrm{Act}_r(G) \to \mathrm{Act}_r(H)$ の右随伴関手などの種々の構成が行えるが，それらを $\mathcal{E}$ が $\mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*}$ の場合に具体的に記述した．さらに，位相アファイン群スキームの例として，profinite である次数付き位相環 R^* に対して R^* の要素を係数とする 1 変数形式群を対応させる関手 を表現する次数付き位相環と，次数付き位相環 R^* に対して階数 n の自由 R^*-加群の間の同型写像全体がなす線形群を対応させる 位相群関手を表現する次数付き位相ホップ代数の構造を具体的に記述した．

(12) 加群のファイバー圏：

R^* を $\mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*}$ の対象，M^* を $\mathcal{T}op\mathcal{M}od_{K^*}$ の対象，$\alpha : M^* \otimes_{K^*} R^* \to M^*$ を M^* の右 R^*-加群としての構造射とするとき，三つ組み (R^*, M^*, α) を対象とし，$\mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*}$ の射 $\lambda : R^* \to S^*$ と $\mathcal{T}op\mathcal{M}od_{K^*}$ の射 $\varphi : M^* \to N^*$ で $\beta(\lambda \otimes_{K^*} \varphi) = \varphi\alpha$ を満たすものの対 (λ, φ) を (R^*, M^*, α) から (S^*, N^*, β) への射とする圏を $\mathcal{M}od$ で表す．そこで，関手 $p : \mathcal{M}od \to \mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*}$ を $p(R^*, M^*, \alpha) = R^*$, $p(\lambda, \varphi) = \lambda$ によって定めれば，p が定める双対圏の間の関手 $p : \mathcal{M}od^{op} \to \mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*}^{op}$ はファイバー圏であることが示される．このファイバー圏は双ファイバー圏だから，(7) で述べた fibered category with products になるため，(8) で述べた理論が適用できる．また，関手 $F : \mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*} \to \mathcal{T}op$ に対して，$\mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*}$ の対象 R^* と $F(R^*)$ の点 x の対 (R^*, x) を対象とし，$\mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*}$ の射 $\lambda : R^* \to S^*$ で，$F(\lambda) : F(R^*) \to F(S^*)$ が $x \in F(R^*)$ を $y \in F(S^*)$ に写すものを $(R^{\cdot}x)$ から (S^*, y) への射とする圏を $\mathcal{T}op\mathcal{A}lg_F$ で表す．関手 $U_F : \mathcal{T}op\mathcal{A}lg_F \to \mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*}$ を $U_F(R^*, x) = R^*, U_F(\lambda) = \lambda$ によって定義し，関手 $M : \mathcal{T}op\mathcal{A}lg_F \to \mathcal{M}od$ で，$pM = U_F$ を F-加群と呼ぶ．F-加群を対象とし，F-加群の間の自然変換 $\boldsymbol{\varphi} : F \to G$ がすべての $\mathcal{T}op\mathcal{A}lg_F$ の対象 (R^*, x) に対して $p(\boldsymbol{\varphi}_{(R^*,x)}) = id_{R^*}$ を満たすものを射とする圏を $\mathcal{M}od(F)$ で表して，F-加群の圏という．このとき, 関手 $F : \mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*} \to \mathcal{T}op$ から関手 $G : \mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*} \to \mathcal{T}op$ への自然変換 f に対して関手 $\tilde{f} : \mathcal{T}op\mathcal{A}lg_F \to \mathcal{T}op\mathcal{A}lg_G$ を $\tilde{f}(R^*, x) = (R^*, f_{R^*}(x))$, $\tilde{f}(\lambda) = \lambda$ によって定義すれば，G-加群 N に対して，$N\tilde{f}$ は F-加群であることに注意する．$\mathcal{T} = \mathrm{Funct}_r(\mathcal{T}op\mathcal{A}lg_{K^*}, \mathcal{T}op)$ とおき, $\mathcal{T}$ の対象 F と F-加群 M の対 (F, M) を対象とし，$\mathcal{T}$ の射 $f : F \to G$ と F-加群の射 $\boldsymbol{\varphi} : N\tilde{f} \to M$ の対 $(f, \boldsymbol{\varphi})$ を (F, M) から (G, N) への射とする圏を $\mathcal{MOD}$ で表す．関手 $p_{\mathcal{T}} : \mathcal{MOD} \to \mathcal{T}$ を $p_{\mathcal{T}}((F, M)) = F$, $p_{\mathcal{T}}(f, \boldsymbol{\varphi}) = f$ で定めたとき，$p_{\mathcal{T}} : \mathcal{MOD} \to \mathcal{T}$ はファイバー圏であり，$\mathcal{T}$ の任意の射 $f : F \to G$ に対し, inverse image functor $f^* : \mathcal{MOD}_G \to \mathcal{MOD}_F$ は左随伴関手と右随伴関手をもつことを示し，$p_{\mathcal{T}} : \mathcal{MOD} \to \mathcal{T}$ は (8) で述べた cartesian closed fibered category であることを証明した．

＜引用文献＞

① Milnor, J. W., The Steenrod algebra and its dual, Ann. of Math., 67, 1958, 150–171.

② Yamaguchi, A., Representations of internal categories, Kyushu Journal of Mathematics Vol.62, No.1, 2008, 139–169.

③ Yamaguchi, A., On excess filtration on the Steenrod algebra, Geometry & Topology Monographs Vol.10, 2007, 423–449.

5．主な発表論文等

〔学会発表〕（計 6 件）

① “コホモロジーと表現論” 京都大学数学教室談話会，2018.1.24

② “Joker and its background” 京都大学代数トポロジーセミナー，2017.12.11

③ “A Convenient Fibered Category for Representation Theory” 信州トポロジーセミナー，2017.7.12

④ “Representations of the group represented by the dual Steenrod algebra” ホモトピー論シンポジウム，2016.11.12

⑤ “Abstract Representation Theory” 京都大学代数トポロジーセミナー，2016.10.31

⑥ “表現論の立場から Steenrod 代数上の非安定加群の理論を理解するための苦闘” 京都大学代数トポロジーセミナー，2015.3.19

〔その他〕ホームページ等

http://www.las.osakafu-u.ac.jp/˜yamaguti/archives/archives.html

http://www.las.osakafu-u.ac.jp/˜yamaguti/archives/rsg_main.pdf

6．研究組織

(1) 研究代表者

山口　睦（YAMAGUCHI, Atsushi）

大阪府立大学・高等教育推進機構・教授

研究者番号：80182426

(2) 研究分担者

入江　幸右衛門（IRIYE, Kouyemon）

大阪府立大学・理学系研究科・教授

研究者番号：40151691