

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 11 日現在

機関番号：32652

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540094

研究課題名(和文)空間グラフのトポロジーと代数的不変量の研究

研究課題名(英文)Research of the topology on spatial graphs and algebraic invariants

研究代表者

新國 亮(NIKKUNI, Ryo)

東京女子大学・現代教養学部・准教授

研究者番号：00401878

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：3次元空間内のグラフを低次元トポロジーの立場から研究する空間グラフ理論について、以下の研究を行った。(1) 空間グラフの単因子不変量の研究を行い、2成分空間グラフのある種のホモトピー分類定理を得た。(2) 空間グラフの被約Wu不変量の研究を行い、グラフの内在的対称性の問題に関する成果を得た。(3) 空間グラフのねじれAlexander不変量の研究を行い、空間グラフ及びハンドル体結び目の分類問題に関する成果を得た。(4) グラフの結び目内在性の研究を行い、特にHeawoodグラフの結び目内在性に関する成果を得た。

研究成果の概要(英文)：We studied spatial graph theory, that is a research of graphs embedded in 3-space from a viewpoint of low dimensional topology. More concretely, we have the following results: (1) We gave a homotopy classification theorem for two-component spatial graphs up to neighborhood equivalence by the elementary divisor-type invariant. (2) We gave an application of reduced Wu invariants of spatial graphs to the research of the intrinsic symmetry for graphs. (3) We studied twisted Alexander invariants of spatial graphs and obtained some results about classification problem for spatial graphs. (4) We obtained the results about the intrinsic knottedness for the Heawood graph.

研究分野：位相幾何学

キーワード：低次元トポロジー 空間グラフ 結び目 絡み目 ハンドル体 不変量

1. 研究開始当初の背景

空間グラフ理論の研究は、結び目理論の一般化という数学的側面に、分子生物学や高分子化学などからの理論的要請も加わって、その重要性が高まっていた。その基礎研究は、分類問題に代表される大域的研究と、結び目・絡み目内在性に代表される複雑度の研究に大別され、いずれの場合も空間グラフの不変量が重要な役割を果たす。特に研究代表者は、グラフの位相型に依らず全ての空間グラフに定義できるという観点から、代数的トポロジーの手法が有効であることに着目し、2000年代中盤から、代数的トポロジーに根ざした空間グラフの不変量の研究を推し進め、分類問題及び内在性の問題の双方に応用し成果を積み上げてきていた。2004年、2010年には空間グラフ理論国際ワークショップがいずれも東京で開催され、日本はこの分野でリーダー的役割を担うようにもなっていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、空間グラフ特有のトポロジカルな性質を、具体的に計算可能な代数的不変量を用いて解明することにあった。特に、代数的トポロジーに根ざした不変量に着目し、グラフの配置空間のコホモロジーなどを用いて定義される特性類的不変量、及び空間グラフの補空間の基本群から導かれる(ねじれ)Alexander不変量の研究を行ない、空間グラフの分類問題の研究、空間グラフの非自明内在性の研究、空間グラフの幾何学的対称性の研究にそれぞれ応用を試み、本質的な進展を目指すものであった。

3. 研究の方法

(1) 7頂点完全グラフ K_7 の任意の空間埋め込みの像は、必ずHamiltonサイクル(=全ての頂点を含むサイクル)の像として非自明な結び目を含む(Conway-Gordon)。この事実を基に、一般にグラフのサイクル集合は、そのグラフの任意の空間埋め込みの像が必ずその元の像として非自明結び目を含むとき、(結び目に関して)非自明であると定義し、更にその任意の真部分集合が非自明でないなら、極小非自明であると定義して、特に7頂点完全グラフの2次元トーラスへの埋め込みの像の双対グラフとして得られるHeawoodグラフの非自明なサイクル集合を調べた。

(2) 2つの空間グラフは、その正則近傍がアンビエント・イソトピックであるとき近傍同値であるといい、その分類はハンドル体絡み目(3次元球面内のハンドル体)のアンビエント・イソトピー分類と同等である。水澤篤彦(早稲田大学)により、一般の多成分空間グラフについて、その各成分の整係数1次元

ホモロジー群の基から定まる絡み目行列から得られる単因子不変量が定義されていた。そこで、この不変量を空間グラフの近傍同値の下でのホモトピー分類、更にはハンドル体絡み目のホモトピー分類に応用することを考えた。

(3) 空間グラフのWu不変量とは、グラフの2点配置空間のある種の変換コホモロジー群に値を取る不変量で、特にグラフが2つの円周の非交和のときは絡み数に、5頂点完全グラフ K_5 もしくは6頂点完全2部グラフ $K_{3,3}$ のときはSimon不変量と呼ばれる整数値不変量にそれぞれ一致する。このとき、絡み目加群から整数加群への準同型写像を介してWu不変量を整数値に落としたものを被約Wu不変量と名付け、グラフの対称性・内在性の問題への応用を考えた。

(4) 空間グラフの補空間の基本群は、全ての空間グラフに定義される強力な不変量である。特に結び目や絡み目の場合は、補空間の基本群からAlexander不変量が引き出され、更に群の線形表現を介してねじれAlexander多項式が得られる。しかし、結び目や絡み目とは限らない空間グラフのねじれAlexander不変量の研究は全く成されていなかったため、その研究を開始した。

(5) 2013年度に第3回空間グラフ理論国際ワークショップを東京で開催し、この場で最新の研究成果を発表すると同時に、世界中の空間グラフ理論の研究者との活発な研究交流、及び情報交換を行ない、空間グラフ理論の研究の更なる本質的な進展を図ることとした。

4. 研究成果

(1) Heawoodグラフについて、Hamiltonサイクルもしくは頂点数12のサイクルの集合は極小非自明であることを示した。即ち、Heawoodグラフの空間埋め込みで、特に非自明結び目をHamiltonサイクルの像として含まないものが存在するが、この事実はこれまで知られていなかった。

(2) 水澤篤彦との共同研究により、2成分空間グラフにおいて、その単因子不変量がホモトピー近傍同値完全分類を与えることを示した。ここでホモトピー近傍同値とは、近傍同値に加えて同一成分上の交差交換を許した同値関係であり、ハンドル体絡み目のホモトピー分類と同等である。我々の結果は、2成分有向絡み目のホモトピー分類の、近傍同値の観点からの2成分空間グラフへの一般化である。

(3) Erica Flapan(Pomona College), Will Fletcher(Stanford University)との共同研究により, 空間グラフの被約 Wu 不変量を用いて以下を示した. K_7 及び Mobius 梯子が内在的キラルであるという事実の単純な別証明を与えた. ここでグラフが内在的キラルであるとは, その任意の空間埋め込みが鏡像対称性を持たないときをいう. Heawood グラフが内在的キラルであることを示した. 空間グラフについて, その任意の被約 Wu 不変量の適当な整数倍は, その空間グラフが含む 2 成分部分絡み目の絡み数, 及び部分空間 K_5 グラフ, 部分空間 $K_{3,3}$ グラフの Simon 不変量のある整係数 1 次結合と一致することを示した. 空間グラフの最小交差数の下界を与えた.

(4) 石井敦(筑波大学), 大城佳奈子(上智大学)との共同で, 空間グラフ, ハンドル体結び目, 曲面絡み目(=4 次元 Euclid 空間内に局所平坦に埋め込まれた閉曲面)のねじれ Alexander 不変量の研究を行った. 具体的には, 鈴木の n 曲線と呼ばれる空間グラフの族の非自明性判定を, 新たにねじれ Alexander 不変量を用いて行った. 種数 2 のハンドル体結び目の石井-岸本-森内-鈴木によるテーブルについて, 幾つかの非同型性判定を, ねじれ Alexander 不変量を用いて行った. 曲面絡み目の吉川によるテーブルについて, ねじれ Alexander イデアルを計算した.

(5) 2004 年, 2010 年に続く第 3 回空間グラフ理論国際ワークショップ「International Workshop on Spatial Graphs 2013」を東京女子大学で開催し, 研究代表者は組織委員の 1 人として集会運営にあたった. 日本, 米国, 韓国, 英国から多数の参加があり, 活発な議論が交わされ, 成功裏に終了した. 研究代表者自身も, 講演者として研究成果を発表した.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

Atsuhiko Mizusawa and Ryo Nikkuni, A homotopy classification of two-component spatial graphs up to neighborhood equivalence, 査読有, Topology and its Applications, 掲載決定.

新國 亮, 空間グラフのトポロジー, 数理科学, 査読無, 2014 年 11 月号(No. 617), pp. 13--19.

Hiroka Hashimoto and Ryo Nikkuni, Conway-Gordon type theorem for the

complete four-partite graph $K_{3,3,1,1}$, New York Journal of Mathematics, 査読有, Vol. 20, 2014 年, pp. 471--495.
<http://nyjm.albany.edu/j/2014/20-27.htm>

Erica Flapan, Will Fletcher and Ryo Nikkuni, Reduced Wu and generalized Simon invariants for spatial graphs, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 査読有, Vol. 156, No. 3, 2014 年, pp. 521--544.
DOI: 10.1017/S0305004114000073

Hiroka Hashimoto and Ryo Nikkuni, On Conway-Gordon type theorems for graphs in the Petersen family, Journal of Knot Theory and its Ramifications, 査読有, Vol. 22, No. 13, 2013 年, pp. 1350048-1--15.
DOI: 10.1142/S021821651350048X

Ryo Nikkuni, Y -exchanges and Conway-Gordon type theorems, Intelligence of Low-dimensional Topology, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, Vol. 1812, 2012 年, pp. 1--14.
<http://hdl.handle.net/2433/194519>

[学会発表](計 10 件)

Ryo Nikkuni (発表者), Conway-Gordon Type Theorems and its Applications I, II, III, The 4th HYU MATH-Workshop: Low Dimensional Topology, Hanyang University, Seoul (Korea), 2014 年 10 月 23, 24 日

新國 亮 (発表者) 一般化された Simon 不変量について, 研究会「2013 琉球結び目セミナー」, 那覇市ぶんかテンプス館 (沖縄県那覇市), 2013 年 9 月 12 日

Erica Flapan, Will Fletcher and Ryo Nikkuni (発表者), On reduced Wu invariants of spatial graphs, International Workshop on Spatial Graphs 2013, 東京女子大学 (東京都杉並区), 2013 年 8 月 13 日

Hiroka Hashimoto and Ryo Nikkuni (発表者), Conway-Gordon type theorem for the complete four-partite graph $K_{3,3,1,1}$, Spatial Graphs Conference, Loyola Marymount University, Los Angeles (United States of America), 2013 年 6 月 8 日

新國 亮 (発表者), 空間グラフの被約 Wu 不変量と内在的非鏡像対称性について, 東京女子大学トポロジーセミナー, 東京女子大学 (東京都杉並区), 2013 年 5 月 11 日

Atsuhiko Mizusawa and Ryo Nikkuni (発表者), A homotopy classification of two-component spatial graphs up to neighborhood equivalence, Claremont Topology Seminar, Pomona College, Claremont (United States of America), 2013年2月26日

新國 亮 (発表者), Capturing a knot in a spatial intrinsically knotted graph, 研究会「2012 琉球結び目セミナー」, てんぷす那覇 (沖縄県那覇市), 2012年9月4日

Ryo Nikkuni (発表者), Y-exchanges and Conway-Gordon type theorems, Knots and Spatial Graphs 2012, Korea Advanced Institute of Science and Technology, Daejeon (Korea), 2012年8月15日

新國 亮 (発表者), Heawood グラフの結び目内在グラフとしての性質について, 筑波大学トポロジーセミナー, 筑波大学 (茨城県つくば市), 2012年7月4日

Ryo Nikkuni (発表者), Y-exchanges and Conway-Gordon type theorems, Intelligence of Low-dimensional Topology, 京都大学数理解析研究所 (京都府京都市), 2012年5月16日

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ウェブサイト URL:
<http://www.lab.twcu.ac.jp/nick/index-e.html>

6. 研究組織

(1)研究代表者
新國 亮 (NIKKUNI, Ryo)
東京女子大学・現代教養学部・准教授
研究者番号：00401878

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし