

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 12 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2012～2015

課題番号：24540096

研究課題名(和文) 曲面結び目と3次元ハンドル体の写像類群の研究

研究課題名(英文) Topological studies on mapping class groups of knotted surfaces and 3-dimensional handlebodies

研究代表者

廣瀬 進 (Hirose, Susumu)

東京理科大学・理工学部・教授

研究者番号：10264144

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：3, 4次元多様体内に埋め込まれた曲面のトポロジーと関連した閉曲面上の写像類群に関する研究を主として行った。特に、向き付け不可能閉曲面上の level 2 写像類群のアーベル化や最小生成系、向き付け不可能閉曲面上の Torelli 群の正規生成系、超楕円的3次元ハンドル体群の擬アノソフ元と有限表示、3次元球面内の Morse-Smale の閉軌道として現れる絡み目、閉曲面上の零同境周期的写像の周期と一意性、境界付きコンパクト曲面上の周期的写像の一意性について結果を得た。

研究成果の概要(英文)：We made several researches mainly on the mapping class group related to topology on the surface embedded in 3 or 4-manifolds. Especially, we obtained results on the abelianization and minimal generating set of the level 2 mapping class groups of non-orientable surfaces, a normal generating set of the Torelli groups of non-orientable surfaces, pseudo-Anosov elements and finite presentations of the hyper-elliptic handlebody group, links which are closed orbits of Morse-Smale flows on the 3-sphere, a uniqueness and periods of null-cobordant periodic maps on closed orientable surfaces, and a uniqueness of periodic maps on compact surfaces with boundaries.

研究分野：数物系科学

キーワード：位相幾何学 低次元トポロジー 写像類群 曲面結び目 3次元ハンドル体

1. 研究開始当初の背景

低次元多様体の研究において、しばしば多様体内の曲面についての考察が必要になる。4次元多様体については、交差形式に関する研究、基本的な4次元多様体に埋め込まれた曲面に沿った分岐被覆による4次元多様体の構成、埋め込まれたトーラスに沿った手術によるエキゾチック構造の構成など、枚挙にいとまがない。3次元多様体については、すべての3次元多様体は3次元ハンドル体とその境界となっている曲面で張り合わせるにより構成されることが知られており、これをヒーガード分解と呼び、この張り合わせる曲面のことをヒーガード曲面と呼ぶ。また、擬アノソフ同相写像をモノドロミーとする円周上の曲面束が双曲構造を許容する3次元多様体の典型的な例となっている。これらの3次元多様体内の曲面の位置を研究することは3次元多様体の位相幾何学的な研究の重要な視点を与えている。

低次元多様体 M 内に埋め込まれた曲面 S の位置を研究するため、 S 上の可微分同相写像で M 全体に拡張するものなす S の写像類群の部分群、すなわち (M, S) の写像類群について研究を行ってきた。

2. 研究の目的

3. 4次元多様体内の閉曲面の写像類群に関して、次の研究を行う。

(1) 4次元多様体の2次のホモロジー類の flexible な曲面による実現可能性の研究

(2) 曲面上の周期的写像と、その4次元球面内での Nielsen 実現可能性の研究

(3) 3次元ハンドル体の写像類群の simple な表示の研究

(4) 3次元球面のヒーガード曲面の写像類群の研究

3. 研究の方法

(1) 向き付け不可能曲面上の写像の4次元空間への拡張可能性を議論する際には、写像類群の level 2 の部分群について理解する必要がある。そこで、level 2 の部分群の生成系について考察し、さらに、その上の Johnson 準同型を調べた。

(2) 向き付け不可能閉曲面の写像類群の構造を深く理解するためには、整係数の1次ホモロジー群へ自明に作用する部分群、すなわち Torelli 群について理解する事が有用である。小林竜馬氏(石川工業高等専門学校)の求めた整係数一般線形群の level 2 主合同部分群の表示を基に、Torelli 群の正規生

成系を求めた。

(3) 3次元ハンドル体の写像類群は現在に至るまで未知な部分の多い群であるが、特に超楕円の対合と可換な部分群について、その球面上の組み紐群との関係、曲面上の測度付き葉層への作用について考察した。

(4) 3次元球面上の特異点のある Morse-Smale 流の閉軌道について、通常のハンドルと round handle の両方を許容する分解を基に考察を行った。

(5) コンパクト曲面上の周期的写像の軌道空間についての詳細な考察を基に、境界のある曲面上の周期的写像や、3次元ハンドル体上の周期的写像について考察した。

4. 研究成果

3・4次元多様体に関連した写像類群の部分群について研究を行い、以下の成果を挙げた。

(1) 向き付け不可能曲面上の level 2 写像類群の生成系とアーベル化についての研究(佐藤正寿氏(東京電機大学)との共同研究):

向き付け不可能曲面上の level 2 写像類群のアーベル化を決定し、更に、その群の最小生成系を求めた。

(2) 向き付け不可能曲面上の Torelli 群の正規生成系についての研究(小林竜馬氏(石川工業高等専門学校)との共同研究):

向き付け不可能曲面上の Torelli 群が、ある種の BP map と BSCC map により生成される事を示した。

(3) 超楕円のハンドル体群の擬アノソフ元と有限表示についての研究(金英子氏(大阪大学)との共同研究):

3次元ハンドル体の写像類群の元のうち超楕円の対合と可換なものなす部分群(超楕円のハンドル体群)を考え、超楕円のハンドル体群内の擬アノソフ元の系列として種数の増大に応じて急激にエントロピーの減少する系列を構成することができた。また、Brendle, Hatcher や Tawn が有限表示を求めている wicket 群もしくは Hilden 群と超楕円のハンドル体群との関係を利用することにより、超楕円のハンドル体群の有限表示を求めた。

(4) 3次元球面上の Morse-Smale 流の閉軌道についての研究(石川昌治氏(東北大学)、亀井聡氏(東京工科大学)、下川航也氏(埼玉大学)、高井駿一氏(埼玉大学(当時))との共同研究):

3次元球面上のある種の条件を満たす特異

点をもつ Morse-Smale 流の閉軌道としてどのような結び目が現れるかについて研究を行った。

(5) 零同境周期的写像の位数と一意性についての研究(圓見知生氏(日立製作所)との共同研究):

閉曲面上の写像がその閉曲面を境界とする何らかの3次元多様体に拡張できるときにその写像が零同境であるという。零同境な周期的写像についてその位数の最大値を明らかにした。一方、閉曲面上の周期的写像について、十分大きな位数をもつ写像のある種の一意性が, Kurkarni, 笠原氏等により示されているが, 同様の結果を零同境周期的写像についても示した。

(6) 境界付き曲面の周期的写像の位相的剛性についての研究(Gromadzki 氏(グダンスク大) Szepietowski 氏(グダンスク大)との共同研究):

境界付き曲面(向きづけ不可能でも良い)について, 周期が十分大きい場合に, 同じ周期を持つ周期的写像の同値類の個数を明らかにした。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

Susumu Hirose, Yasushi Kasahara, "A uniqueness of periodic maps on surfaces", Journal of the Mathematical Society of Japan, 査読あり, 印刷中
<http://mathsoc.jp/publication/JMSJ/inpress.html>

Susumu Hirose, Masatoshi Sato, "A minimal generating set of the level 2 mapping class group of a non-orientable surface", Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 157, (2014), 345-355, 査読あり
DOI: 10.1017/S0305004114000358

Susumu Hirose, Yuusuke Nakashima, "Seifert surfaces in open books, and pass moves on links", Journal of Knot Theory and its Ramifications, vol. 23, (2014), 1450021-1-1450021-12, 査読あり
DOI: 10.1142/S0218216514500217

Susumu Hirose, Naoyuki Monden "Degree of roots of disk twists on 3-dimensional handlebodies", Geometriae Dedicata, vol. 164, (2013), 73-82, 査読あり
DOI: 10.1007/s10711-012-9759-4

Susumu Hirose, "Abelianization and Nielsen realization problem of the mapping class group of handlebody", Geometriae Dedicata vol. 157, (2012), 217-225, 査読あり

DOI: 10.1007/s10711-011-9606-z

[学会発表](計14件)

Susumu Hirose, A finite presentation for the hyperelliptic handlebody group, The 11th East Asian School of Knots and Related Topics, 2016年1月26日, 大阪市立大学

廣瀬 進, 超楕円的ハンドル体群の有限表示について, 広島大学トポロジー幾何セミナー, 2015年11月10日, 広島大学大学院理学研究科数学教室

廣瀬 進, 複体を用いた閉曲面の写像類群とその部分群の研究, 談話会, 2015年10月19日, 大阪大学理学研究科数学教室

Susumu Hirose, The mapping class groups of non-orientable surfaces and their subgroups, Glances@Manifolds, 2015年7月18日, Uniwersytet Jagiellonski, Poland

Susumu Hirose, The mapping class groups of non-orientable surfaces and their subgroups, Atelier de travail franco-japonais sur la geometrie des groupes modulaires et des espaces de Teichmueller, 2014年10月16日, 大阪大学理学部

廣瀬 進, 非有向曲面の Torelli 群の正規生成系について, 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」, 2014年8月26日, 東京大学大学院数理科学研究科

廣瀬 進, 4次元空間内の曲面の変形と写像類群, トポロジー金曜セミナー, 2013年12月13日, 九州大学伊都キャンパス

廣瀬 進, 佐藤正寿, The mod 2 Johnson homomorphism and the abelianization of the level 2 mapping class group of a non-orientable surface, 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」, 2013年8月26日, 東京大学大学院数理科学研究科

廣瀬 進, 4次元多様体内の曲面の変形と写像類群, 第60回トポロジーシンポジウム, 2013年8月6日, 大阪市立大学

Susumu Hirose, Masatoshi Sato, The mod 2 Johnson homomorphism and the abelianization of the level 2 mapping class group of a non-orientable surface, Workshop: Johnson homomorphisms, 2013年6月5日, 東京大学大学院数理科学研究科

廣瀬 進, 向き付け不可能閉曲面のレベル2写像類群のアーベル化について, 大阪大学低次元トポロジーセミナー, 2012年11月13日, 大阪大学

Susumu Hirose, The non-orientable surfaces standardly embedded in the 4-sphere and their mapping class groups, The Conference on Group Actions and Applications in Geometry, Topology and Analysis, 2012年07月23日, Kunming University of Science and Technology, Kunming, China

廣瀬 進, 4次元球面内の標準的な向き付け不可能曲面の写像類群について, 東北大学幾何セミナー, 2012年7月10日, 東北大学
Susumu Hirose, On the extendability of diffeomorphisms over non-orientable surfaces standardly embedded in the 4-sphere, Workshop on low dimensional conformal structures and their groups, 2012年6月28日, Institute of Mathematics, Gdansk University, Gdansk, Poland

6. 研究組織

(1) 研究代表者

廣瀬 進 (HIROSE SUSUMU)

東京理科大学・理工学部・教授

研究者番号: 10264144

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし