1版

様　式　C－19、F－19、Z－19　(共通)

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 １５ 日現在

機関番号：３２６８９

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：２４５４０１００

研究課題名（和文）空間グラフの位相幾何学的研究

研究課題名（英文）A study of spatial graphs from topological viewpoint

研究代表者

谷山　公規（TANIYAMA, KOUKI）

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授

研究者番号：１０２４７２０７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,100,000円

研究成果の概要（和文）：金属部分（ハード・変形しない）と輪ゴム部分（ソフト・変形可）からなるハード・ソフト系の知恵の輪の解法について、特に解法に必要な手数について、空間グラフの部位指定交差交換距離の研究として定式化することによって研究した。群論を用いた従来の議論ではなく、被覆空間を用いた新しい幾何的な研究方法を考案した。関連して絡み目の成分指定結び目解消数についても研究した。また不連続写像の合成写像がいつ連続写像となるかについても研究した。

研究成果の概要（英文）：We have studied puzzle ring problem by formulating it into a problem of site-specific crossing change distance of spatial graphs. In stead of group presentation arguments known so far we have used covering space arguments. We have also studied when a composition of discontinuous maps is continuous.

研究分野：数物系科学

キーワード：位相幾何学　結び目理論　空間グラフ

１．研究開始当初の背景

空間グラフ理論は世界的に幾何的な観点と代数的な観点の双方から種々の研究がなされてきた。日本は空間グラフ理論研究における世界的なリーダーであり、２００４年と２０１０年には空間グラフ理論の国際ワークショップを早稲田大学で開催していた。

２．研究の目的

空間グラフ理論は位相幾何学、特に結び目理論の一分野である。この分野の基礎研究を推進し、応用への準備もするのが本研究の目的である。考える問題としては、空間グラフの各種同値関係に関する分類問題、空間グラフが内蔵する結び目・絡み目の問題、空間グラフの射影図の問題、空間グラフの不変量の問題、空間グラフの３次元トポロジー的な研究問題、特に空間グラフの曲面を使っての研究問題などがある。

３．研究の方法

２０１３年に開催する空間グラフ理論国際ワークショップを主軸にしてその前後に国内外の諸研究者と研究交流して理論を進展させる。２０１２年にはこれまでに得られている結果を整理して、考えるべき問題をリストアップする。２０１３年にはそれらの問題を中心にして理論を発展させる。２０１４年には得られた成果を整理して発表し、今後の発展につなげる。また力学系理論、平面曲線論、数論など幾何学、数学の諸分野の研究者との研究交流をはかる。

４．研究成果

（１）ハードソフト系の知恵の輪問題の解法について位相幾何学（トポロジー）の観点から研究した。ハードソフト系の知恵の輪とは、金属などで出来た変形しない部分と、十分な長さを持つ紐や輪ゴムなどからなる変形可能な部分からなる知恵の輪のことである。ハードソフト系の知恵の輪問題とは、初期状態（多くの場合、変形しない部分に変形可能な部分が絡まっていてはずれない状態を意味する。）から完成状態（多くの場合、変形しない部分から変形可能な部分が外れている状態を意味する。）へ変形可能であることを示す問題である。さらに、初期状態から完成状態への変形に対して必要な「手順の数」というものが定義されている場合には、初期状態から完成状態への変形に必要な手順の最小数を求めることも問題となる。今回、この手順の最少数を、結び目理論における結び目解消数や絡み目解消数の概念の類似として、以下のように定義した。変形しない部分と変形可能な部分のそれぞれについて３次元空間内で強変形レトラクトとなる１次元複体をとり、さらに変形しない部分に対応する１次元複体に適当に辺を追加して空間グラフを作る。この追加した辺は仮想的な辺であり、この辺と変形可能な部分に対応する１次元複体の辺との交差交換によって初期状態に対応する空間グラフから完成状態に対応する空間グラフへの変形が可能となる。その際に必要な交差交換の最少数を手順の最少数として定義した。この手順の最少数を、いくつかの典型的なハードソフト系の知恵の輪について、被覆空間についての初等的な議論を用いて決定した。

（２）不連続写像の合成写像がいつ連続写像となるかについて研究した。位相空間Ｘからそれ自身への全単射ｆを一つ固定したときに、各整数ｎに対してｆのｎ乗が自然に定義される。ここでｆの０乗はＸからＸへの恒等写像であり、ｆの-1 乗はｆの逆写像である。このときｆのｎ乗がＸからＸへの連続写像となるような整数n全体の集合をC(f,X)と記すことにする。C(f,X)は整数全体の集合Ｚの部分集合であるが、恒等写像は連続写像であることより０を含み、連続写像の合成写像は連続写像であることより、ｍとｎがともにC(f,X)の元であればm+n もC(f,X)の元となる。つまりC(f,X)は Z の部分モノイドとなる。逆に、Z の部分モノイドＣを一つ与えたときに、ある位相空間ＸとＸからそれ自身への全単射ｆが存在してC=C(f,X)となることを示した。位相空間Ｘにコンパクトハウスドルフという制限をつけると、コンパクト空間からハウスドルフ空間への全単射連続写像は同相写像となることより、C(f,X)はＺの部分群となる。つまりｆのｎ乗がＸからＸへの連続写像であれば､ｆの-n乗もXからXへの連続写像となる。Ｚの部分群Ｃを一つ与えたときに、あるコンパクトハウスドルフ空間ＸとＸからそれ自身への全単射ｆが存在してC=C(f,X)となることも示した。さらに一般に、位相空間Ｘからそれ自身への全単射全体の中で連続な全単射がどのように分布しているかについての考察をした。

（３）空間グラフの site-specific Gordian distance について研究した。site-specific Gordian distance とは交差交換を行なう abstract edges の pair を指定した交差交換距離のことである。link の場合には site-specific Gordian distance は component-specific Gordian distance と呼ばれる。その特別な場合として Milnor link 型の Brunnian links の component-specific Gordian distance について考察した。Milnor link 型の Brunnian links の component-specific Gordian distance は link homotopy invariant ではないことを例をもって示した。一つの link の

component-specific Gordian distances がどのような値を取りうるかという実現問題について考察した。一般に ordered oriented link の component-specific unknotting number、さらに一般に ordered oriented links の component-specific Gordian distance を定義した。n-component ordered oriented link の component-specific unknotting numbers がどのような値をとりうるかについて考察した。

（４）伊藤昇氏と瀧村祐介氏との共同研究として、高々有限個の横断的な２重点のみを多重点に持つ球面閉曲線たちは５種類の Reidemeister moves のうちのどのようなもので互いに移りあうかについて考察した。特に Reidemeister move 3 を、そこに現れる 3 辺形の orientation が coherent であるものを strong Reidemeister move 3、coherent でないものを weak Reidemeister move 3、と呼んで、Reidemeister move 1 と strong Reidemeister move 3 が生成する同値関係、さらには Reidemeister move 1 と weak Reidemeister move 3 が生成する同値関係について考察した。

（５）３次元ユークリッド空間内の結び目を３次元ユークリッド空間から３次元ユークリッド空間への同相写像とは限らない連続写像で繰り返し写した場合にどのようになるかについて考察した。この問題に関連して、同じ平面射影図を持つ結び目は同値であるという事実を一般化する補題を示した。結び目の射影図の場合にはそれを射影する平面に関して結び目は局所的には単射になっているが、単射でない場合も含めて考察した。ただし扱った結び目は有限個の直線分の和集合である結び目に限定した。また、３次元ユークリッド空間から３次元ユークリッド空間へのある連続写像が存在して、任意に与えられた結び目型の無限列に対して、ある３次元ユークリッド空間内の結び目が存在して、その結び目をその連続写像で繰り返し写した際にその像が特異結び目ではなく結び目となり、その結び目型が与えられた無限列を実現するようにとれることを示した。この結び目は tame knot でとれるが、この結び目を有限個の直線分の和集合としてとれるかどうかは未解決である。

（６）Conway-Gordon による nontrivial knot をちょうど１つ Hamilton cycle すなわち 7-cycle として持つ７頂点完全グラフの３次元ユークリッド空間への埋め込みについて、nontrivial knot がちょうど１つであることを示す別証明を発見した。７頂点完全グラフはトーラスに一意的に埋め込み可能である。トーラスに自然にユークリッド計量を入れておいたときに、その埋め込みにおけるサイクルの長さを考える。トーラスを自然に３次元ユークリッド空間に埋め込んだときに、そのトーラス上のサイクルは全て自明な結び目かまたはトーラス結び目である。非自明なトーラス結び目になるためにはトーラスのメリディアンとロンジチュード方向に回る回数をそれぞれ p, q としたときに(p,q)は(2,3)もしくはそれ以上でなければならない。するとそのサイクルの長さの 2 乗は $2^2+3^2=13$ 以上でなければならない。そこでその長さ以上のサイクルはただ１つであることが分かり、この空間７頂点完全グラフは nontrivial knot をちょうど１つ Hamilton cycle として持つことが分かる。簡単な空間全同位変形により、この空間７頂点完全グラフは Conway-Gordon によるものと全同位であることが示される。これで証明が完成する。７頂点完全グラフは Hamilton cycle だけでも 360 個あり、従来は場合分けによるチェックが不可欠であったが、この計量を使う方法でシンプルに示されることになった。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

N. Ito, Y. Takimura and K. Taniyama, Strong and weak $(1,3)$ homotopies on knot projections, to appear in Osaka J. Math.

K. Taniyama, Discontinuous maps whose iterations are continuous, Nihonkai Math. J., 25 (2014), no. 2, 119--125.http://projecteuclid.org/euclid.nihmj/1427390302.

K. Taniyama, Mapping a knot by a continuous map, J. Knot Theory Ramifications, 23, 1450052 (2014) [14 pages] DOI: 10.1142/S0218216514500527.

M. Sakamoto and K. Taniyama, Plane curves in an immersed graph in R^2, J. Knot Theory Ramifications, 22, 1350003 (2013), DOI: 10.1142/S021821651350003X.

K. Taniyama, Multiplicity of a space over another space, J. Math. Soc. Japan, 64 (2012), no. 3, 823-849, DOI:10.2969/jmsj/06430823.

R. Nikkuni and K. Taniyama, $¥triangle Y$-exchanges and the Conway-Gordon theorems, J. Knot Theory Ramifications, 21, 1250067 (2012), no. 7, DOI: 10.1142/S0218216512500678.

６．研究組織

(1)研究代表者

谷山 公規（Taniyama Kouki）

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授

研究者番号：10247207